Jurnal Lontar Physics Today
Vol. 3 No. 1 Februari 2024, p 36 – 44
e-ISSN 2828-0970
Available Online at http://journal.upgris.ac.id/index.php/UPT
DOI: 10.26877/lpt.v3i1.18011

Lontar Physics Today

Persamaan Gelombang Satu Dimensi dengan menggunakan Metode *Neural Network*

F Armawanto[1,2] W Kurniawan[1], dan D E Handayani[1]
[1]Program Studi Pendidikan Fisika Universitas PGRI Semarang, Jl. Lontar No. 1 Semarang

[2]E-mail: fardika178@gmail.com

Abstrak. Persamaan gelombang yang berupa persamaan differesial parsial akan diselesaikan secara numerik menggunakan finite diference explicit dan Neural Network. Hasil dari penyelesaian secara numerik menggunakan finite diference explicit akan dilakukan uji stabilitas. Setelah didapatkan kondisi yang stabil maka hal tersebut dinyatakan valid. Sehinhgga, dari hasil finite diference explicit yang valid dapat di bandingkan dengan metode Neural Network. Sementara itu, keberhasilan Neural Network sangat tergantung pada besarnya *epochs* yang terjadi pada pemograman dan hasil tersebut dapat dievaluasi dari hasil train loss dan test loss.

Kata kunci: persamaan gelombang, finite diference, Neural Network

Abstract. The wave equation in the form of partial differential equation will be solved numerically using *finite diference explicit* and *Neural Network*. The results of the numerical solution using *finite diference explicit* will be tested for stability. After obtaining a stable condition, it is declared valid. Thus, the valid results of explicit finite diference can be compared with the *Neural Network* method. Meanwhile, the success of the *Neural Network* is highly dependent on the number of *epochs*s that occur in the programming and these results can be evaluated from the results of train loss and test loss.

Keywords: wave equation, finite diference, Neural Network

1. Pendahuluan

Dalam ilmu fisika, matematika, teknik, dan bidang-bidang yang terkait, gelombang adalah gangguan yang merambat secara dinamis dari satu atau lebih parameter [1]. dalam kehidupan sehari-hari gelombang merupakan fenomena yang muncul dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi, mulai dari gelombang elektromagnetik hingga gelombang mekanik. Gelombang elektromagnetik merupakan gelombang yang merambat secara bergelombang melalui beberapa variabel karakteristik seperti panjang gelombang, amplitudo dan frekuensi. Sedangkan gelombang mekanik dapat merambat melalui perantara seperti gelombang transversal dan longitudinal yang memiliki proses perambatan pada tali atau suara melalui medium udara atau benda lain. Persamaan gelombang merupakan bagian yang sangat penting dalam ilmu pengetahuan dan matematika terapan yang memiliki banyak aplikasi seperti analisis perambatan gelombang, akustik dan dinamika. Dalam kasus persamaan gelombang, kita dapat menemukan solusinya dengan menggunakan persamaan diferensial parsial [2]. Persamaan gelombang adalah persamaan diferensial parsial linier orde dua yang digunakan untuk menggambarkan perambatan gelombang dalam fisika klasik, seperti gelombang mekanik (contohnya gelombang dalam air, gelombang suara, dan gelombang seismik) atau gelombang elektromagnetik (termasuk gelombang cahaya) [3], [4]. Persamaan diferensial parsial linier atau nonlinier memiliki berbagai macam aplikasi dalam fisika dan teknik. Persamaan diferensial parsial hiperbolik memodelkan getaran struktur (misalnya bangunan dan mesin) dan merupakan dasar dari persamaan umum fisika atomic [5].

Hubungan yang saling terkait antara gelombang dan lingkungannya membuat pemodelan dan prediksi perilaku gelombang menjadi masalah yang menarik. Penggunaan metode konvensional untuk menyelesaikan persamaan gelombang sering kali membutuhkan asumsi yang sangat sederhana dan tidak memadai untuk memodelkan situasi dunia nyata. Sehingga, Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan metode baru dalam memodelkan persamaan gelombang dengan menggunakan pendekatan *Neural Network*. *Neural Network* dapat menyelesaikan masalah matematis yang kompleks dan dapat diaplikasikan dalam konteks persamaan gelombang. Dengan *Neural Network* diharapkan dapat memperoleh solusi yang lebih akurat dan memprediksi perilaku gelombang dalam kondisi yang nyata [6][7]. Persamaan gelombang dapat diselesaikan dengan melalui metode *Neural Network*, penyelsaian secara numerik dengan metode *Neural Network* juga dilakukan sebagai salah satu solusi terbaru dalam pemodelan matematika secara komputasi [8]. Metode *Neural Network* dapat digunakan untuk memprediksi dan memodelkan permasalahan dalam persamaan gelombang. Dalam menemukan solusi komputasi untuk persamaan gelombang, perlu diperhatikan kondisi stabilitas numerik. Dalam hal ini, menggunakan pendekatan finite difference explicit untuk kasus persamaan gelombang. Dengan menggunakan *Neural Network* kita dapat memastikan stabilitas dalam solusi finite difference explicit pada persamaan gelombang [9].

Untuk menyelesaikan masalah persamaan gelombang satu dimensi, solusi numerik dapat dibandingkan dengan metode *Neural Network*. *Neural Network* dengan kemampuannya digunakan untuk mempelajari pola dan hubungan dalam data yang akan di input. Karena, *Neural Network* dapat memberikan prediksi dari input ke output, berupa penggambaran grafik yang menampilkan bagaimana pola gelombang dari waktu ke waktu dan dari ruang ke ruang [10]. Hal ini tidak hanya membantu dalam memahami prinsip-prinsip yang mendasari persamaan, tetapi juga mengidentifikasi variabel-variabel atau parameter yang mempengaruhi perilaku gelombang. Dengan menggunakan metode *Neural Network* diharapkan dapat memahami dan memvisualisasikan bentuk gelombang dari berbagai permasalahan. *Neural Network* memiliki sturuktur yang terdiri *dari input layer, hidden layer*, dan *output layer. Input layer* dalam *Neural Network* adalah berisikan variabel acak dasar atau data dari luar, sedangkan output layer digunakan untuk membangun fungsi keadaan batas yang diprediksi atau hasil pemrosesan data. Pada *hidden layer* digunakan untuk pemrosesan atau pemodelan data dengan fungsi matematika tertentu. *Hidden layer* pada metode *Neural Network* memiliki peran penting dalam memungkinkan model untuk mempelajari hubungan yang sangat kompleks antara input dan output [11].

Permasalah Persamaan diferensial parsial dapat diselesaikan menggunakan *neural network* dengan penerapan NeuroDiffq dan jenis solusi lainnya, seperti DeepXDE. NeuroDiffq adalah salah satu hal terbaru dalam *Neural Network* untuk memecahkan Persamaan Diferensial Parsial. sementara itu DeepXDE memiliki banyak kelebihan dan kekurangan [12]. Melalui pendekatan ini, diharapkan dapat memberikan solusi yang lebih akurat dan efisien. Dalam proses *Neural Network* solusi numerik pada persamaan gelombang akan diproses dalam struktur *Neural Network* sehingga, diharapkan dengan menggunakan *Neural Network* akan menghasilkan solusi yang paling efisien untuk berbagai algoritma pembelajaran [13]. Lebih tepatnya, menggunakan *Physics-informed Neural Networks* (PINNs) dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial bersama dengan data awal dan batas yang ditentukan, dan dengan demikian dapat dilihat sebagai pendekatan alternatif untuk menyelesaikan persamaan diferensial dibandingkan dengan pendekatan numerik tradisional seperti metode *finite diference* [14]. Untuk mendapatkan solusi numerik persamaan diferensial dapat memperkirakan parameter yang digunakan dalam persamaan diferensial. Kemampuan memodelkan metode numerik berguna untuk mengidentifikasi berbagai jenis aliran gelombang dan memberikan solusi yang didapatkan melalui *Physics-informed Neural Networks* (PINNs) [15].

2. Metode

Persamaan gelombang merupakan hal yang sangat penting dalam penelitian khususnya dibidang fisika. Persamaan gelombang adalah bentuk diferensial parsial orde dua yang menggambarkan perambatan gelombang dalam suatu medium. Secara umum, persamaan gelombang digunakan untuk menjelaskan bagaimana gelombang melewati ruang dan waktu. Ada beberapa jenis persamaan gelombang, seperti persamaan gelombang mekanik untuk gelombang suara atau gelombang air, dan persamaan gelombang elektromagnetik untuk gelombang cahaya dan radio. Dengan memahami persamaan gelombang dapat diketahui bahwa terjadi beberapa hal dalam persamaan gelombang seperti memiliki perubahan gelombang dan pola arus gelombang. Adanya metode *Neural Network* akan mempermudah untuk mengembangkan model numerik yang dapat disimulasikan fenomena gelombang dengan akurat. Untuk persamaan umum dari persamaan diferensial parsial pada persamaan gelombang dapat diberikan menurut

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

dengan u merupakan posisi yang bergantung pada posisi lain x dan waktu t. Serta, kasus-kasus yang terkait dengan gelombang memiliki nilai awal dan syarat batas.

Dengan nilai awal,

$$u(x,0) = I(x)$$
$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = f(t)$$

dan syarat batas,

$$u(0,t) = 0$$
$$u(L,t) = 0$$

Solusi numerik digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial pada persamaan gelombang secara numerik. Metode numerik yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode *finite diference explicit* dan metode *Neural Network.* Persamaan gelombang dapat diselesaikan secara numerik dengan metode *finite diference explicit* menggunakan sumber dari penjabaran dari deret Taylor untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial pada persamaan gelombang. Dengan menggunakan metode *Neural Network* didapatkan solusi persamaan diferensial parsial pada persamaan gelombang secara modern atau dalam bidang fisika komputasi. Dengan menggabungkan metode *finite diference explicit* dan *Neural Network* dapat memperoleh solusi yang lebih akurat dan efisien dalam memahami pola perubahan perilaku gelombang satu dimensi.

3. Hasil dan Pembahasan

Hasil Dalam kasus persamaan gelombang satu dimensi yang dijabarkan pada persamaan (1), dapat kita tinjau dengan menggunakan metode *finite diference explicit*. Berdasarkan kondisi awal dan syarat batas yang akan kita gunakan, sehingga didapatkan persamaan *finite diference explicit* yang dihitung pada setiap waktu dan ruang. Sehingga didapatkan solusi untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial pada persamaan gelombang dengan diskritisasi persamaan (1) diuraikan menjadi

$$u_{tt} = \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{h_t^2} \tag{2}$$

$$u_{tt} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h_x^2} \tag{3}$$

Sehingga,

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{h_t^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h_x^2} \tag{4}$$

Suku yang dicari adalah u_j^{n+1} yang diuraikan menurut

$$u_j^{n+1} = s\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) + 2(1-s)u_j^n - u_j^{n-1} \tag{5}$$

dengan $s = c^2 \frac{h_t^2}{h_x^2}$

Menggunakan penyelesaian diskritisasi turunan parsial dalam persamaan berikutnya perlu untuk membuat diskritisasi nilai awal

$$u(x,0) = I(x) \rightarrow u_j^0 = I(x) \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0 \rightarrow \frac{u_j^1 - u_j^{-1}}{2h_t} = 0$$

$$u_j^1 = u_j^{-1} \tag{7}$$

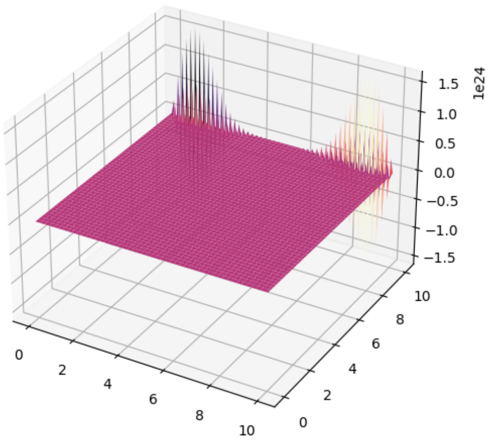
Substitusikan persamaan (7) ke persamaan (1)

$$u_j^1 = \frac{s}{2}\left(u_{j+1}^0 + u_{j-1}^0\right) + (1-s)u_j^0 \tag{8}$$

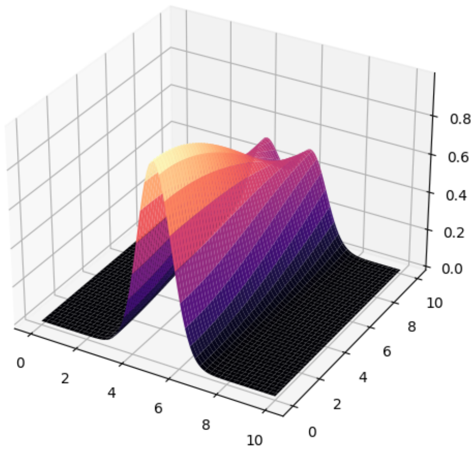
Fungsi awal $I(x)$ yang diambil adalah

$$I(x) = e^{-k(x-x_0)^2} \tag{9}$$

Setelah berhasil menyelesaikan secara numerik dengan menggunakan metode *finite diference explicit*, selanjutnya melakukan validasi terhadap hasil yang diperoleh. Validasi ini penting dilakukan untuk memastikan kelayakan dan keakuratan hasil simulasi dalam merepresentasikan sebuah kejadian yang akan dimodelkan. Salah satu aspek yang perlu diuji adalah kestabilan hasil numerik. Secara umum, parameter yang digunakan dalam simulasi, seperti parameter kecepatan (v), dapat mempengaruhi kestabilan hasil. Berdasarkan penelitian sebelumnya, didapatkan bahwa untuk memastikan hasil yang stabil, nilai parameter *v* harus berada di bawah sebesar 1. Jika nilainya lebih dari sebesar 1.1, hasil yang didapatkan cenderung menjadi tidak stabil. Untuk memberikan pemahaman yang lebih mendalam mengenai perbedaan kestabilan tersebut, dapat dilihat pada gambar berikut. Gambar ini menunjukkan dampak perubahan nilai parameter v terhadap kestabilan hasil simulasi.



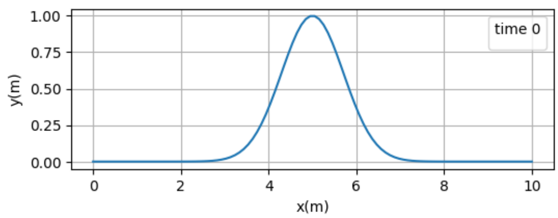
Gambar 1.a parameter *v* sebesar 1.1



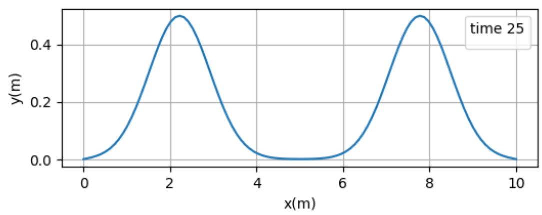
Gambar 1.b parameter *v* sebesar 0.1

Dengan memperhatikan nilai-nilai tersebut, akan menjadi acuan penting dalam memvalidasi suatu persamaan menggunakan metode *finite diference explicit* dalam hal simulasi numerik. Dengan validasi yang tepat, hasil simulasi dapat diandalkan dan memberikan kontribusi yang berarti bagi pemahaman fenomena yang diteliti. Dari grafik yang stabil dan tidak stabil dapat memberikan informasi tentang bagaimana perubahan waktu setiap iterasi berpengaruh terhadap sistem.

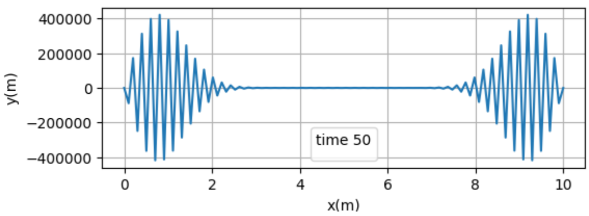
Dengan metode *Neural Network* juga dapat memvisualisasikan grafik fungsi pada setiap *time step*, untuk menganalisis pola perubahan nilai [16]. Grafik yang stabil akan menunjukkan perubahan yang terjadi pada setiap iterasi yang dapat diprediksi dan berulang-ulang terus dari waktu ke waktu. Sebaliknya, grafik yang tidak stabil dapat menunjukkan ketidakseimbangan atau perbedaan yang dapat mempengaruhi simulasi hasil akhir. Pada gambar (1.a dan 1.b) kita dapat mempelajari proses yang terjadi pada grafik dan memastikan bahwa simulasi numerik tidak hanya akurat, tetapi juga dapat diandalkan pada setiap tahap perhitungan. Sehingga, untuk memberikan visual dan pemahaman lebih baik tentang bagaimana perubahan yang terjadi terhadap kedua variabel ruang dan waktu. Dengan ini, untuk mendapatkan hasil yang valid diperlukan penyesuaian parameter untuk meningkatkan stabilitas hasil simulasi.



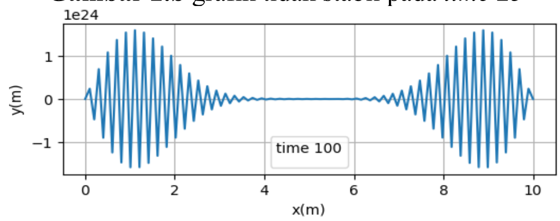
Gambar 2.a grafik tidak stabil pada *time* 0



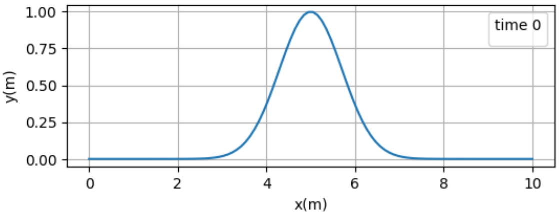
Gambar 2.b grafik tidak stabil pada *time* 25



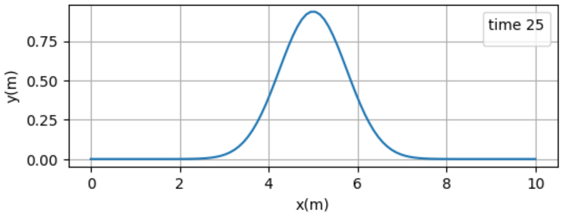
Gambar 2.c grafik tidak stabil pada *time* 50



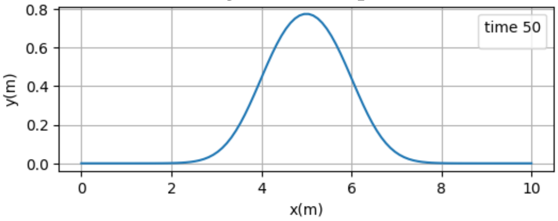
Gambar 2.d grafik tidak stabil pada *time* 100



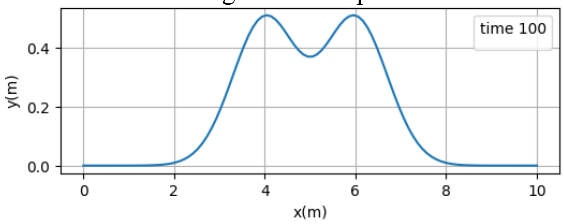
Gambar 3.a grafik stabil pada *time* 0



Gambar 3.b grafik stabil pada *time* 25



Gambar 3.c grafik stabil pada *time* 50

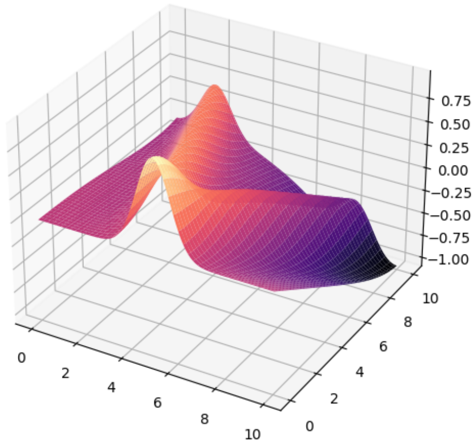


Gambar 3.d grafik stabil pada *time* 100

Beberapa grafik tersebut dapat dipahami bagaimana grafik dengan parameter *v* stabil dengan yang tidak stabil. Ketika, menggunakan nilai v sebesar 1,1 pada langkah waktu 0,25, 50, dan 100, grafik menunjukkan variasi yang cukup signifikan, sehingga menghasilkan perubahan yang sulit untuk dianalisis. Sebaliknya, grafik dengan nilai v sebesar 0,1 pada langkah waktu yang sama menunjukkan stabilitas yang lebih besar, sehingga memudahkan analisis data. Hal ini menunjukkan bahwa pemilihan parameter, seperti nilai v memiliki dampak yang besar terhadap kestabilan grafik, dan penyesuaian parameter dapat memastikan hasil simulasi yang lebih akurat dan dapat diterima.

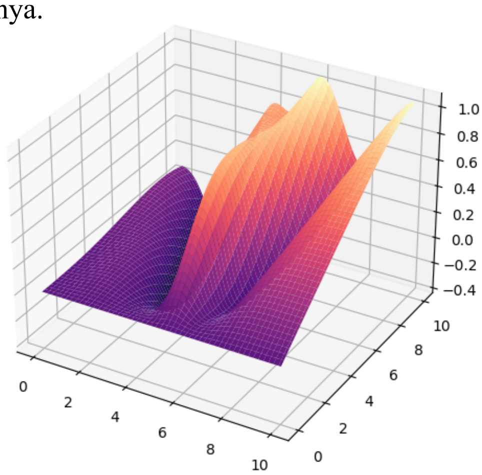
Setelah memastikan nilai parameter v yang membuat hasil metode *finite diference explicit* stabil, maka validitasnya dapat dianggap cukup terjamin. Dengan kemajuan teknologi, pendekatan baru seperti *Neural Network* mulai memiliki peran penting dalam simulasi numerik. *Neural Network* memberikan banyak keuntungan dalam menghadapi masalah yang kompleks dan dapat mengikuti pola-pola yang rumit [17]. Melalui perbandingan antara hasil metode *finite diference explicit* yang stabil dan prediksi yang diberikan oleh *Neural Network*, kita dapat memperoleh pemahaman yang lebih dalam tentang kelebihan dan kekurangan masing-masing metode dalam menyelesaikan persamaan gelombang satu dimensi.

Penggunaan *Neural Network* telah menjadi salah satu pendekatan utama untuk menyelesaikan berbagai masalah yang kompleks. Untuk penelitian ini dalam menyelesaikan permasalahannya digunakan Solusi penerapan *neurodiffeq* untuk mendapatkan pemahaman yang lebih mendalam dan penelitian sebelumnya banyak menerapkan deepXDE [12]. Dalam penelitian lainnya, menjalankan *Neural Network* membutuhkan pemilihan jumlah iterasi atau *epochs* yang tepat untuk menyelesaikan masalah yang dihadapi. Dimana penentuan *epochs* merupakan langkah penting untuk menyelesaikan masalah [18]. Dalam kasus penelitian ini, hal yang utama adalah menyelesaikan persamaan gelombang. untuk melakukan berbagai percobaan dengan mengatur jumlah *epochs* yang berbeda, yaitu 1000, 10000, dan 20000. Dengan memvariasikan nilai *epochs*, maka dapat menyesuaikan model tersebut, sehingga menghasilkan keseimbangan antara *underfitting* dan *overfitting*. ketika, Jumlah *epochs* yang lebih rendah dapat menyebabkan *underfitting*, di mana model gagal menangkap kompleksitas data, sementara jumlah yang berlebihan dapat menyebabkan *overfitting*. Sehingga, dengan *epochs* tepat maka hasil yang didapatkan berupa valid terhadap solusi yang telah diselesaikan sebelumnya menggunakan solusi eksplisit [19].



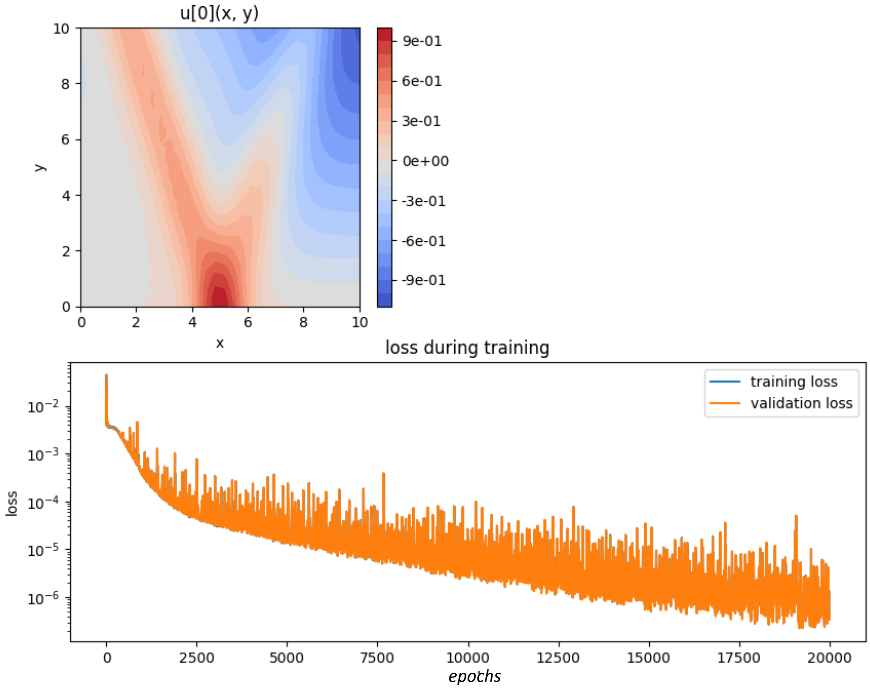
Gambar 4. Hasil *Neural Network* dengan *epochs 20000*

Perbandingan antara hasil yang diperoleh dari metode *finite diference explicit* dan pendekatan *Neural Network* memberikan sebuah pemahaman berbeda. Setelah mendapatkan grafik hasil *Neural Network* yang hampir menyerupai metode *finite diference explicit*, kemudian bisa dipelajari lebih lanjut perbandingan antara keduanya. Grafik hasil *Neural Network* yang mendekati metode eksplisit merupakan sebuah prediksi bahwa model *Neural Network* berhasil meniru pola dan grafik yang terdapat pada metode *finite diference explicit*. Kemiripan grafik tersebut dapat memberikan gambaran akan kemampuan pendekatan *Neural Network* dalam memodelkan persamaan gelombang satu dimensi. Selanjutnya, kita perlu membandingkan perbedaan model visual dari hasil *finite diference explicit* dan *Neural Network*, dengan pengurangan dari kedua metode tersebut sehingga dapat diketahui bagian mana yang paling terlihat perbedaannya.



Gambar 5. Selisih metode *finite diference explicit* dan *Neural Network*

Selain itu, penting untuk mengevaluasi kemampuan *Neural Network* melalui *training loss* dan *validation loss*. *Training loss* menunjukkan sejauh mana model dapat beradaptasi dengan data pelatihan, sedangkan *validation loss* mengukur sejauh mana model dapat menggeneralisasi data baru yang belum pernah dilihat [20]. Analisis tren *training loss* dan *validation loss* dapat memberikan pemahaman tentang stabilitas dan generalisasi model *Neural Network* dalam hal simulasi persamaan gelombang [21]. Oleh karena itu, perbandingan grafik dan mengevaluasi *loss* dapat menjadi langkah penting untuk menilai kemampuan dan akurasi pendekatan *Neural Network* dalam simulasi persamaan diferensial parsial.



Gambar 5. *Plot countur* dan *loss during training*

4. Simpulan

Dalam penelitian ini, dapat disimpulkan bahwa penerapan metode beda hingga eksplisit dan *Neural Network* dalam analisis persamaan gelombang satu dimensi memberikan pemahaman yang lebih menarik dan mendalam. Metode *finite diference explicit* memberikan kestabilan pada simulasi gelombang, sedangkan *Neural Network* memberikan kemampuan prediksi yang baik. Dengan menggabungkan keduanya, kita dapat memperoleh kelebihan dalam menganalisis dan memahami persamaan gelombang dengan lebih baik. Pendekatan ini memungkinkan penerapan yang lebih luas dalam simulasi gelombang yang kompleks, dan memberikan dasar bagi pengembangan teknologi prediksi yang lebih cepat. Kesimpulannya, penelitian ini merupakan langkah penting dalam menggabungkan metode lama dan pendekatan modern untuk pemahaman yang lebih mendalam tentang gelombang satu dimensi.

Ucapan Terima Kasih

Saya ingin mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan. Pertama, saya ingin mengucapkan terima kasih kepada dosen pembimbing atas bimbingan, arahan, dan inspirasinya. Terima kasih juga kepada teman se-pembimbing yang selalu memberikan dukungan moral, berbagi ide, dan memberikan masukan yang membangun. Semoga artikel ini dapat memberikan manfaat dan pengaruh positif bagi dunia akademik.

Daftar Pustaka

[1] Pain H J 2005 The physics of vibrations and waves *John Wiley & Sons, Ltd*

[2] Alkhadhr S and Almekkawy M 2023 Wave Equation Modeling via Physics-Informed *Neural Network*s: Models of Soft and Hard Constraints for Initial and Boundary Conditions *Sensors* **23**(5)

[3] Chasamah N A, Jamhuri M, and Alisah E 2021 Solusi Numerik Persamaan Gelombang Dua Dimensi Dengan Metode Beda Hingga Skema Eksplisit CTCS *Jurnal Riset Mahasiswa Matematika* **1**(1) p 14–22

[4] Mahmoodi K, Ghassemi H, and Heydarian A 2017 Solving the Nonlinear Two-Dimension Wave Equation Using Dual Reciprocity Boundary Element Method *International Journal of Partial Differential Equations and Applications* **5**(1) p 19–25

[5] Mirzaee F and Bimesl S 2013 A new approach to numerical solution of second-order linear hyperbolic partial differential equations arising from physics and engineering *Results Physics* **3** p 241–247

[6] Hsieh W W and Tang B 1998 Applying *Neural Network* Models to Prediction and Data Analysis in Meteorology and Oceanography *Bulletin of the American Meteorological Society* p 1855-1970

[7] Deo M C and Naidu C S 1999 Real *time* wave forecasting using Neural Networks *Ocean Engineering* **26**(3) p 191-203

[8] Hughes T W, Williamson I A D, Minkov M, and Fan S 2019 Wave physics as an analog recurrent Neural Network *arXiv:1904.12831v2*

[9] Lines L R, Slawinski R, and Bording R P 1998 A recipe for stability of finite-difference wave-equation computations *CREWES Research Report* **10**

[10] Elhewy A H, Mesbahi E, and Pu Y 2006 Reliability analysis of structures using *Neural Network* method *Probabilistic Engineering Mechanics* **21**(1) p 44–53

[11] Azuri I, Rosenhek-Goldian I, Regev-Rudzki N, Fantner G, and Cohen S R 2021 The role of convolutional neural networks in scanning probe microscopy: a review *Bailstein J Nanotechnol* **12** p 878-901

[12] Chen F *et al.* 2020 NeuroDiffEq: A Python package for solving differential equations with Neural Networks *J Open Source Software* **5**(46)

[13] Ahamed K I and Akthar S 2016 A Study on *Neural Network* Architectures *Computer Engineering and Intelligent System* **7**(9)

[14] Bihlo A and Popovych R O 2022 Physics-informed *Neural Network*s for the shallow-water equations on the sphere *Journal of Computational Physics* **456** 111024

[15] Cedillo S, Núñez A G, Sánchez-Cordero E, Timbe L, Samaniego E, and Alvarado A 2022 Physics-Informed *Neural Network* water surface predictability for 1D steady-state open channel cases with different flow types and complex bed profile shapes *Adv. Model. Simul. Eng. Sci.* **9**(1)

[16] Alguacil A, Bauerheim M, Jacob M C, and Moreau S 2021 Predicting the propagation of acoustic waves using deep convolutional Neural Networks *J Sound and Vibration* **512**

[17] Anitescu C, Atroshchenko E, Alajlan N, and Rabczuk T 2019 Artificial *Neural Network* methods for the solution of second order boundary value problems *Computers, Materials and Continua* **59**(1) p 345–359

[18] Siahkoohi A, Louboutin M, and Herrmann F J 2019 *Neural Network* augmented wave-equation simulation *arXiv:1910.00925v2*

[19] Wolff T, Carrillo H, Martí L, and Sanchez-Pi N 2021 Towards Optimally Weighted Physics-Informed *Neural Network*s in Ocean Modelling *arXiv:2106.08747*

[20] Sorteberg W E, Garasto S, Pouplin A S, Cantwell C D, and Bharath A A 2018 Approximating the solution to wave propagation using deep *Neural Network*s *arXiv:1812.01609*

[21] Pratama D A, Bakar M A, Ismail N B, and Mashuri M 2022 ANN-based methods for solving partial differential equations: a survey *Arab Journal of Basic and Applied Sciences* **29**(1) p 233–248