Imajiner: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
ISSN (Online): 2685-3892
Vol. 2, No. 6, November 2020, Hal. 540-548
Available Online at journal.upgris.ac.id/index.php/imajiner

Studi Pendugaan Rekursif dan Nilai Dugaan Proses Obsrervasi Model *Hidden* Markov

Musafa[1], Nurmaily Meli[2]
[1,2]STP ARS Internasional
[1]musafa@ars.ac.id

ABSTRAK

Model *hidden* Markov mengasumsikan bahwa barisan rantai Markov tersembunyi di dalam proses observasi. Karena penyebab kejadian dari proses observasi disembunyikan maka diperlukan estimasi parameternya. Proses ini berjalan melalui pendugaan rekursif di dalam ukuran peluang baru. Perumusan pendugaan rekursif menggunkan metode perubahan ukuran peluang. Penelitian ini membahas pendugaan rekursif proses observasi dan nilai dugaanya dari model *Hidden* Markov Elliott *et al.* (1995).
Kata Kunci: rantai Markov; model *Hidden* Markov; perubahan ukuran; pendugaan rekursif.

ABSTRACT

The hidden Markov *model assumes that the Markov chain is hidden in the observation process. Since the cause of the event from the observation process is hidden, it is necessary to estimate the parameters. This process goes through recursive estimates of new probability measures. The formulation of recursive estimates uses the probability measure method. This study discusses recursive estimation of the observation process and its estimated value from the Hidden Markov model of Elliott et al. (1995)*
Keywords: Markov *chain*; *Hidden* Markov *model*; *change of measure; recursive estimation.*

PENDAHULUAN

Konsep percobaan random merupakan ide dasar teori probabilistik (Ross, 2008). Percobaan ini menghasilkan objek pengamatan yang kejadiannya tidak dapat ditentukan sebelumnya. Walpole (2017) mendefinisikan probabilistik sebagai derajat kepastian atau keyakinan kemunculan suatu peristiwa dari percobaan random.

Proses stokastik adalah model probabilistik yang menggambarkan suatu barisan peristiwa terjadi secara random dalam rangkaian kondisi atau waktu tertentu (Ghahramani, 2018). Patrick Roger (2010) menjelaskan proses stokastik bedasarkan pada perubahan untuk setiap nilai secara random mengikuti alur waktu. Definisi proses stokastik menurut J. Leon (2014) adalah koleksi hasil akhir dari setiap tahapan suatu barisan percobaan yang mempunyai peluang. Ketiga pendapat ini dapat menjelaskan bahwa proses stokastik adalah suatu rangkaian peristiwa dalam dunia nyata yang mengalami perubahan secara random pada satuan waktu, masa lalu hingga masa sekarang, jika menghasilkan suatu kerangka peluang keadaan di masa yang akan datang.

Proses Markov merupakan proses stokastik yang memenuhi sifat-sifat berikut: 1) Kumpulan hasil yang mungkin dari proses ini berhingga. 2) Peluang hasil atau keadaan terjadi pada proses selanjutnya bergantung kepada hasil sebelumnya. 3) Peluang keadaan terjadi adalah tetap pada setiap proses.

Model *Hidden* Markov merupakan model stokastik dari rangkaian proses Markov, berupa pasangan *state* dengan parameter tersembunyi dibalik proses observasi yang dapat diamati secara langsung (Elliott *et al.*, 1995). Setiap *state* mempunyai distribusi probabilitas dari satuan-satuan informasi yang mungkin muncul, sehingga model ini dapat memberikan beberapa informasi tentang barisan-barisan *state*.

METODE PENELITIAN

Studi ini merupakan kajian pustaka pendugaan rekursif Model *Hidden* Markov Elliott *et al.* (1995) dengan menggunakan metode perubahan ukuran peluang.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini diawali dengan definisi Model *Hidden* Markov Elliott *et al.* (1995) dengan berbagai karakteristiknya. Selanjutnya. Upaya melakukan kajian teorema dan lema yang berkaitan dengan perubahan ukuran peluang, dan studi pendugaan rekursif proses observasi dan nilai dugaannya.

Model *Hidden* Markov Elliott *et al.* (1995)

Model ini dapat melakukan pendugaan proses observasi yang akan datang, dengan *state* penyebab kejadian yang tersembunyi. Pendugaan parameter model *Hidden* Markov membutuhkan langkah perubahan ukuran peluang. Mekanisme perubahannya dari bentuk asal menjadi bentuk baru, kemudian dikonstruksi kembali ke dalam bentuk asal. Turunan Radon-Nykodim yang membatasi perubahannya. Reestimasi parameter model menggunakan pendugaan rekursif. Dalam studi ini, yang akan dibahas adalah penduga proses observasi dan nilai dugaannya.

1. *State* dan Proses Observasi Model *Hidden* Markov

Semua proses Markov dan proses obesrvasi didefinisikan pada ruang peluang $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Misalkan $X = \{X_k ; k \in \mathbb{N}\}$ adalah rantai Markov dengan *state* berhingga yang bersifat homogen dan tersembunyai pada proses observasi $Y = \{Y_k; k \in \mathbb{N}\}$. Pasangan proses stokastik $(X_k, Y_k), k \in \mathbb{N}$ merupakan model *Hidden* Markov.
$\{\mathcal{F}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ adalah filtrasi lengkap yang dibangkitkan oleh $\{X_k\}$, dan $\{\mathcal{Y}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ adalah filtrasi lengkap yang dibangkitkan oleh $\{Y_k\}$. $\{X_k\}$ adalah rantai Markov homogen dengan ruang *state* $X_k, S_X = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$, dimana $e_i \in \Re^N$, dan $A = (a_{ji})_{N\times N}$ adalah matriks peluang transisi rantai Markov dengan

$$(a_{ji}) = P(X_{k+1} = e_j | \mathcal{F}_k) = P(X_{k+1} = e_j | X_k = e_i),$$

yang memenuhi $\sum_{j=1}^{N} a_{ji} = 1,\ a_{ji} \geq 0. \{\mathcal{G}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ adalah filtrasi lengkap yang dibangkitkan oleh $\{X_k\}$ dan $\{Y_k\}$.

2. *State* dan Proses Observasi Model Diskrit

Ruang proses obervasi $Y_k, S_Y = \{f_1, f_2, \cdots, f_M\}$, dimana $f_i \in \Re^M$, dan $C = (c_{ji}) \in \Re^{M\times N}$ merupakan matriks peluang transisi dengan
$c_{ji} = P(Y_{k+1} = f_j | \mathcal{G}_k) = P(Y_{k+1} = f_j | X_k = e_i),$
yang memenuhi $\sum_{j=1}^{M} c_{ji} = 1,\ c_{ji} \geq 0, 1 \leq j \leq M, 1 \leq i \leq N.$
Model *Hidden* Markov Diskrit Elliott *et al.* (1995) yang dibahas adalah

$$X_{k+1} = AX_k + V_{k+1},$$
$$Y_{k+1} = CX_k + W_{k+1}, \text{ untuk } k \in \mathbb{N}.$$

V_k dan W_k memenuhi:

$$E[V_{k+1} | \mathcal{F}_k] = 0,$$
$$E[W_{k+1} | \mathcal{G}_k] = 0,$$
$$\langle V_{k+1}\rangle := E[V_{k+1}V_{k+1}^T | \mathcal{F}_k] = \text{diag}(AX_k) - A \text{ diag } X_k A^T,$$
$$\langle W_{k+1}\rangle := E[W_{k+1}W_{k+1}^T | \mathcal{G}_k] = \text{diag}(CX_k) - C \text{ diag } X_k C^T.$$

Jika $\pi_j = P(X = e_j)$, maka vektor $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)^T$merupakan nilai harapan dari X, yaitu $\pi = E[X]$ dan untuk X *ergodic* memenuhi $A\pi = \pi$ dan $\sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1$.

3. *State* dan Proses Observasi Model Kontinu

Model *Hidden* Markov Kontinu dengan waktu diskret (Elliott *et al.*, 1995) yang dibahas berbentuk:

$$X_{k+1} = AX_k + V_{k+1}$$
$$Y_{k+1} = c(X_k) + \sigma(X_k)\omega_{k+1},$$

di mana ruang *state* dari X adalah $S_X = \{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$, dengan $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots 0)^T \in \Re^N$, yaitu himpunan vektor satuan $e_i \in \Re^N$, di mana hanya elemen ke-i yang bernilai 1 dan lainnya 0. $A = (a_{ji})_{N\times N}$ adalah matriks peluang transisi yang memenuhi $\sum_{j=1}^{N} a_{ji} = 1,\ a_{ji} \geq 0$.
Jika $\pi_j = P(X_k = e_j)$, maka vektor $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N)^T$ merupakan nilai harapan dari X, yaitu $\pi = E[X]$ dan untuk X *ergodic* memenuhi $A\pi = \pi$ dan $\sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1$.
$\{\omega_{k+1}\}$ adalah barisan peubah acak yang bebas stokastik identik menyebar normal dengan rataan nol dan ragam satu, $N(0,1)$. ω_{k+1} dan V_k bebas stokastik.

Misalkan $\{\mathcal{F}_k, k \in \mathbb{N}\}$ adalah filtrasi lengkap yang dibangkitkan oleh X dan V_k memenuhi $E[V_{k+1} | \mathcal{F}_k] = 0$. Karena $X_k \in S_X$, maka fungsi c dan σ didefinisikan sebagai vektor $, dan\ \sigma = (\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_N)^T \in \Re^N$. Didefinisikan $c(X_k) = \langle c. X_k\rangle$ dan $\sigma(X_k) = \langle \sigma. X_k\rangle$, di mana $\langle \ldots, \ldots\rangle$ merupakan perkalian dalam di $\Re^N$ dengan $\sigma_i > 0$, untuk $0 \leq i \leq N$.

4. Nilai harapan Bersyarat

Misalkan barisan $\{\mathcal{Y}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ adalah filtrasi lengkap yang dibangkitkan oleh $\{Y_k\}$, dan $\{\mathcal{G}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ adalah filtrasi lengkap yang dibangkitkan oleh $\{X_k\}$ dan $\{Y_k\}$. Karena $\omega_k, k \in \mathbb{N}$ peubah acak bebas stokastik identik, maka ω_k bebas stokastik dari $\mathcal{G}_k$ dan $\mathcal{F}_k$. Selanjutnya akan diturunkan sebaran bersyarat X_k jika diketahui $\mathcal{Y}_k$, X_{k+1} jika diketahui $\mathcal{Y}_{k+1}$, dan nilai harapan bersyarat Y_{k+1} jika diketahui $\mathcal{Y}_k$.

Lema (Elliott *et al.*, 1995)
$\langle E[X_k|\mathcal{Y}_k], e_i\rangle = E[\langle X_k. e_i\rangle|\mathcal{Y}_k] = P(X_k = e_i|\mathcal{Y}_k)$

Bukti

$$\begin{aligned}\langle E[X_k|\mathcal{Y}_k], e_i\rangle &= \textstyle\sum_{j=1}^{N} P(X_k = e_i|\mathcal{Y}_k)\langle e_j, e_i\rangle \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{N}\langle e_j P(X_k = e_i|\mathcal{Y}_k), e_i\rangle \\ &= P(X_k = e_i|\mathcal{Y}_k). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Lema (Hogg *et al.*, 2013)
Jika ω adalah peubah acak yang menyebar normal, $\mathbf{N}(0,1)$, maka $\sigma_i\omega$, $\sigma_i > 0$, adalah peubah acak normal menyebar normal, $\mathbf{N}(0, \sigma_i)$.

Sebaran bersyarat dari Y_{k+1} jika diketahui $\mathcal{Y}_k$ dengan $t \in \Re$ sebarang adalah

$$\begin{aligned}P(Y_{k+1} \leq t|\mathcal{Y}_k) &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} P(Y_{k+1} \leq t, X_k = e_i|\mathcal{Y}_k) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} P(Y_{k+1} \leq t|X_k = e_i)P(X_k = e_i|\mathcal{Y}_k) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} P(c_i + \sigma_i\omega_{k+1} \leq t)P(X_k = e_i|\mathcal{Y}_k) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{N} P(X_k = e_i|\mathcal{Y}_k)P(\sigma_i\omega_{k+1} \leq t - c_i).\end{aligned}$$

Misalkan $\hat{X}_k = E[X_k|\mathcal{Y}_k] = \langle \hat{X}_k, e_i\rangle = P(X_k = e_i|\mathcal{Y}_k)$, dan jika diketahui $\phi_i(x)$ adalah fungsi kepadatan dengan $\mathbf{N}(0, \sigma_i)$, maka fungsi kepadatan bersyarat dari Y_{k+1} jika diketahui $\mathcal{Y}_k$ adalah $\sum_{j=1}^{N}\langle \hat{X}_k, e_j\rangle\, \phi_j(t - c_j)$. Adpaun sebaran bersama bersyarat dari X_k dan Y_{k+1} jika diketahui $\mathcal{Y}_k$ adalah

$$P(X_k = e_i, Y_{k+1} \leq t|\mathcal{Y}_k) = \langle \hat{X}_k, e_i\rangle\phi_i(t - c_i).$$

Lebih lanjut, berdasarkan hasil $\langle \hat{X}_k, e_i\rangle\phi_i(t - c_i)$ dan dengan menggunakan aturan Bayes maka dari nilai harapan berikut

$$E[\langle X_k, e_i\rangle|\mathcal{Y}_{k+1}] = \frac{P(X_k = e_i, Y_{k+1}|\mathcal{Y}_k)}{P(Y_{k+1}|\mathcal{Y}_k)}$$

didapatkan

$$E[X_k|\mathcal{Y}_{k+1}] = \frac{\sum_{i=1}^{N}\langle \hat{X}_k, e_i\rangle\phi_i(y_{k+1} - c_i)e_i}{\sum_{j=1}^{N}\langle \hat{X}_k, e_j\rangle\phi_j(y_{k+1} - c_j)}.$$

Teorema (Elliott *et al.*,1995)

$$\hat{X}_{k+1} = E[X_{k+1}|\mathcal{Y}_{k+1}] = \frac{\sum_{i=1}^{N}\langle \hat{X}_k, e_i\rangle \phi_i(y_{k+1}-c_i)Ae_i}{\sum_{j=1}^{N}\langle \hat{X}_k, e_j\rangle \phi_j(y_{k+1}-c_j)}.$$

Teorema ini menunjukkan bahwa $\hat{X}_{k+1}$ bergantung pada $\hat{X}_k$ dan y_{k+1} secara tidak linear.

Perubahan Ukuran

Ukuran peluang awal P diubah menjadi peluang baru $\bar{P}$ kemudian diinterpretasikan kembali ke dalam ukuran peluang P. Perubahan ukuran ini dibatasi oleh turunan Radon-Nikodym (Billingsley, 1995).

1. Perubahan Ukuran Model Diskrit

Di bawah ukuran peluang *P* pada $(\Omega, \vee_{l=1}^{\infty}\mathcal{G}_l)$, dan $\vee_{l=1}^{\infty}\mathcal{G}_l$ adalah medan-σ yang dibangkitkan $\mathcal{G}_l, \forall l \in \mathbb{N}$ berlaku:

- *X* merupakan rantai Markov yang homogen dan memenuhi $X_{k+1} = AX_k + V_{k+1},$ dan $E[V_{k+1}|\mathcal{F}_k] = 0.$
- $Y_{k+1} = CX_k + W_{k+1},\ k \in \mathbb{N}$ di mana $E[W_{k+1}|\mathcal{G}_k] = 0$ dan Y_{k+1} merupakan peubah acak yang bergantung pada X_k.

Akan dikontruksi suatu peluang baru $\bar{P}$ pada $(\Omega, \vee_{l=1}^{\infty}\mathcal{G}_l)$ yang kontinu absolut terhadap *P*, dengan turunan Radon-Nikodym $\frac{d\bar{P}}{dP}\Big|_{\mathcal{G}_k} = \Lambda_k$. Eksistensi Λ_k dijamin oleh Teorema Radon-Nikodym dan eksistensi $\bar{P}$ dijamin oleh Teorema Perluasan Kolmogorov (Wong dan Hajek, 1985).

Definisikan $\lambda_l = \prod_{i=1}^{M}\left(\frac{1}{Mc_l^i}\right)^{Y_l^i}$, dan $\Lambda_k = \prod_{l=1}^{k}\lambda_l$, di mana $Y_k^i = \begin{cases}1, & \text{untuk } i = k\\ 0, & \text{untuk } i \neq k\end{cases}$.

Jadi λ_k adalah fungsi tak linear dari Y_k sehingga dapat ditulis $\lambda_k = \lambda_k(Y_k) = \sum_{i=1}^{M}\frac{Y_k^i}{Mc_k^i}$.

Sehingga di bawah ukuran peluang $\bar{P}$ pada $(\Omega, \vee_{l=1}^{\infty}\mathcal{G}_l)$ berlaku:

- X merupakan rantai Markov yang homogen dan memenuhi $X_{k+1} = AX_k + V_{k+1},$ dan $E[V_{k+1}|\mathcal{F}_k] = 0.$
- *Y* merupakan barisan peubah acak diskret dengan $S_Y = \{f_1, f_2, \cdots, f_M\}$ yang bersifat bebas stokastik identik dan menyebar seragam dengan $\bar{P}(Y_t = f_i) = \frac{1}{M},$ untuk $i = 1,2,\cdots, M.$
- Y_k dan V_k saling bebas

Konstruksi ukuran peluang *P* pada $(\Omega, \vee_{l=1}^{\infty}\mathcal{G}_l)$ dari $\bar{P}$ dengan turunan Radon-Nikodym $\frac{dP}{d\bar{P}}\Big|_{\mathcal{G}_k} = \bar{\Lambda}_k$ sehingga di bawah *P*, model di atas dipenuhi yaitu:

- X merupakan rantai Markov homogen yang memenuhi $X_{k+1} = AX_k + V_{k+1}$ dan $E[V_{k+1}|\mathcal{F}_k] = 0.$
- $Y_{k+1} = CX_k + W_{k+1},\ k \in \mathbb{N}$ di mana $E[W_{k+1}|\mathcal{G}_k] = 0$ dan Y_{k+1} merupakan peubah acak yang bergantung pada X_k.

Untuk menentukan ukuran peluang *P* dari $\bar{P}$ didefinisikan $\bar{\lambda}_l$ dan $\bar{\Lambda}_k$ yang merupakan invers dari λ_l dan Λ_k, yaitu $\bar{\lambda}_l = \prod_{i=1}^{M}(Mc_l^i)^{Y_l^i}$, $\bar{\Lambda}_k = \prod_{l=1}^{k}\bar{\lambda}_l$, $\bar{\Lambda}_0 = 1$ dan $\frac{dP}{d\bar{P}}\Big|_{\mathcal{G}_k} = \bar{\Lambda}_k,\ l, k \in \mathbb{N}.$

2. Perubahan Ukuran Model Kontinu

Di bawah ukuran *P* pada $(\Omega, \mathcal{F})$ berlaku:

- *X* merupakan rantai Markov yang homogen dan memenuhi $X_{k+1} = AX_k + V_{k+1},$ dan $E[V_{k+1}|\mathcal{F}_k] = 0.$
- $Y_{k+1} = c(X_k) + \sigma(X_k)\omega_{k+1},\ k \in \mathbb{N},$ di mana $\{\omega_{k+1}\}$ merupakan barisan peubah acak kontinu yang bersifat bebas stokastik identik menyebar normal $\mathrm{N}(0,1)$. Y_{k+1} merupakan

peubah acak yang bergantung pada X_k dengan fungsi kepekatan peluang dari Y_{k+1} adalah $\sum_{i=1}^{N} \pi_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i}} e^{-\frac{1}{2\sigma_i}(t-c_i)^2}$.

Di dalam ruang peluang (Ω, F) didefinisikan ukuran peluang baru $\bar{P}$ dengan batasan turunan Radon-Nikodym $\frac{d\bar{P}}{dP}\Big|_{\mathcal{G}_k} = \Lambda_k$. Eksistensi Λ_k dijamin oleh Teorema Radon-Nikodym dan eksistensi $\bar{P}$ dijamin oleh Teorema Perluasan Kolmogorov (Wong dan Hajek, 1985). Akan dikontruksikan ukuran peluang $\bar{P}$ yang kontinu absolut terhadap P dengan $\frac{d\bar{P}}{dP} = \lambda$ dan peubah acak Y mempunyai fungsi kepadatan ϕ:

$$\bar{P}(Y \le t) = \int_{-\infty}^{t} \phi(y)\, dy = \int_{-\infty}^{t} \lambda(\omega)\, \phi(\omega) \frac{1}{\sigma}\, dy,$$

sehingga di bawah ukuran peluang $\bar{P}$ akan berlaku:

- X merupakan rantai Markov yang homogen dan memenuhi $X_{k+1} = AX_k + V_{k+1}$, dan $E[V_{k+1} \mid \mathcal{F}_k] = 0$.
- Y merupakan barisan peubah acak kiontinu yang bebas stokastik identik menyebar normal $\mathrm{N}(0,1)$.

Definisikan ukuran peluang P dari $\bar{P}$ dengan batasan turunan Radon-Nikodym terhadap $\mathcal{G}_k$ $\frac{dP}{d\bar{P}}\Big|_{\mathcal{G}_k} = \bar{\Lambda}_k$. Ukuran peluang P yang dikonstruksi kembali menggunakan $\bar{\lambda}_l = {\lambda_l}^{-1} = \frac{\phi(\omega_l)}{\langle \sigma, X_{l-1}\rangle \phi(y_l)}$ yang memenuhi $\langle \sigma, X_k \rangle \neq 0$. $\bar{\Lambda}_k = \prod_{l=1}^{k} \bar{\lambda}_l$, $\bar{\Lambda}_0 = 1$,dan $l, k \in \mathbb{N}$.

Definisi dan Teorema Pendugaan Rekursif Model *Hidden* Markov

Pendugaan parameter model *Hidden* Markov dengan menggunakan reestimasi parameternya membutuhkan ukuran peluang baru. Pendugaan rekursif adalah bentuk reestimasi parameter model ini di dalam ukuran peluang baru.

Definisi (Elliot *et al.*, 1995)
Didefinisikan

$$V_{k+1} \coloneqq X_{k+1} - AX_k,$$

dengan

$$\begin{aligned} E[V_{k+1} \mid \mathcal{F}_k] &= E[\, V_{k+1} \mid X_k] \\ &= E[\, X_{k+1} - AX_k \mid X_k] \\ &= E[\, X_{k+1} \mid X_k] - E[\, AX_k \mid X_k] \\ &= E[\, X_{k+1} \mid X_k] - AE[\, X_k \mid X_k] \\ &= AX_k - AX_k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Teorema (Elliot *et al.*, 1995)
$c_j = Ce_j = \left(c_{1j}, c_{2j}, \cdots, c_{Mj}\right)^T, 1 \le j \le N$, adalah kolom ke-j dari matriks $C = (c_{ji})_{M\times N}$, dan $a_j = Ae_j = \left(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{Nj}\right)^T$ adalah kolom ke-j dari matriks $A = \left(a_{ji}\right)_{N\times N}$.
Maka

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1,k+1}(H_{k+1}) = \textstyle\sum_{j=1}^{N} c_j(Y_{k+1}) \{\langle \gamma_{k,k}(H_k) + \gamma_{k+1,k}(\alpha_{k+1} + \langle \delta_{k+1}, Y_{k+1}\rangle), e_j\rangle\, a_j \\ +[\mathrm{diag}(\, a_j) - \, a_j a_j^T]\bar{E}[\langle \bar{\Lambda}_k X_k, e_j\rangle \beta_{k+1} \mid \mathcal{Y}_{k+1}]. \end{aligned}$$

Bukti:

$$\begin{aligned} &\gamma_{k+1,k+1}(H_{k+1}) = \gamma_{k+1}(H_{k+1}X_{k+1}) \\ &= \bar{E}[\bar{\Lambda}_{k+1} H_{k+1} X_{k+1} \mid \mathcal{Y}_{k+1}] \\ &= \bar{E}[\bar{\Lambda}_{k+1}(\, H_k + \alpha_{k+1} + \langle \beta_{k+1}, V_{k+1}\rangle + \langle \delta_{k+1}, Y_{k+1}\rangle)(AX_k + V_{k+1}) \mid \mathcal{Y}_{k+1}] \\ &= \bar{E}[\bar{E}[\bar{\Lambda}_{k+1}(\, H_k + \alpha_{k+1} + \langle \beta_{k+1}, V_{k+1}\rangle + \langle \delta_{k+1}, Y_{k+1}\rangle)(AX_k + V_{k+1}) \mid \mathcal{G}_{k+1}] \mid \mathcal{Y}_{k+1}] \\ &= \bar{E}[\bar{E}[(H_k + \alpha_{k+1} + \langle \beta_{k+1}, V_{k+1}\rangle + \langle \delta_{k+1}, Y_{k+1}\rangle)AX_k \bar{\Lambda}_{k+1} + (H_k + \alpha_{k+1} + \end{aligned}$$

$$\langle \beta_{k+1}, V_{k+1}\rangle + \langle \delta_{k+1}, Y_{k+1}\rangle) V_{k+1}\bar{\Lambda}_{k+1} |\, \mathcal{G}_{k+1}]|\, \mathcal{Y}_{k+1}]|\, \mathcal{Y}_{k+1}]$$
$$= \sum_{j=1}^{N} c_j(Y_{k+1})\{(\langle \gamma_{k,k}(H_k), e_j\rangle + \langle \gamma_{k+1,k}(\alpha_{k+1} + \langle \delta_{k+1}, Y_{k+1}\rangle), e_j\rangle)a_j$$
$$+[\operatorname{diag}(AX_k) - A\operatorname{diag}(X_k)A^T]\bar{E}[\langle \bar{\Lambda}_k X_k, e_j\rangle \beta_{k+1} | \mathcal{Y}_{k+1}]\}$$
$$= \sum_{j=1}^{N} c_j(Y_{k+1})\{(\langle \gamma_{k,k}(H_k), e_j\rangle + \langle \gamma_{k+1,k}(\alpha_{k+1} + \langle \delta_{k+1}, Y_{k+1}\rangle), e_j\rangle)a_j +$$
$$[\operatorname{diag}(a_j) - a_j a_j^T]\bar{E}[\langle \bar{\Lambda}_k X_k, e_j\rangle \beta_{k+1} | \mathcal{Y}_{k+1}]\}. \quad \blacksquare$$

Lema (Elliot *et al.*, 1995)

$$\bar{E}[V_{k+1} |\, \mathcal{G}_k] = 0.$$

Bukti:

Dengan menggunakan definisi 4.4.1, didapatkan

$$\begin{aligned} \bar{E}[V_{k+1} |\, \mathcal{G}_k] &= \bar{E}[V_{k+1} |\, \mathcal{F}_k, \mathcal{Y}_k] \\ &= \bar{E}[V_{k+1} |\, \mathcal{F}_k] \\ &= 0. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Lema (Elliot *et al.*, 1995)

$$\bar{E}[V_{k+1} |\, \mathcal{Y}_{k+1}] = 0.$$

Bukti:

Dengan menggunakan Lema 4.4.3, didapatkan

$$\begin{aligned} \bar{E}[V_{k+1} |\, \mathcal{Y}_{k+1}] &= \bar{E}[\bar{E}[V_{k+1} |\, \mathcal{G}_k, \mathcal{Y}_{k+1}]|\, \mathcal{Y}_{k+1}] \\ &= \bar{E}[\bar{E}[V_{k+1} |\, \mathcal{G}_k]|\, \mathcal{Y}_{k+1}] \\ &= \bar{E}[0 |\, \mathcal{Y}_{k+1}] \\ &= 0. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Notasi (Elliot *et al.*, 1995)

$$c_j(Y_k) = M \prod_{i=1}^{M} c_{ij}^{Y_k^i}$$

Teorema (Elliott *et al.*, 1995)

Misalkan H_k adalah suatu proses yang bernilai skalar dan *adapted* terhadap filtrasi $\mathcal{G}$: H_0 terukur $\mathcal{F}_0$, dan $H_{k+1} = H_k + \alpha_{k+1} + \langle \beta_{k+1}, V_{k+1}\rangle + \delta_{k+1} f(y_{k+1}), n \geq 1$. $V_{k+1} = X_{k+1} - AX_k$, f fungsi bernilai skalar, α, β, δ adalah proses yang *predictable* terhadap filtrasi $\mathcal{G}$, dan β adalah proses vektor berdimensi N, maka

$$\gamma_{k+1}(H_{k+1}X_{k+1}) := \gamma_{k+1,k+1}(H_{k+1}) =$$
$$\sum_{i=1}^{N} \left\{ \begin{array}{l} \langle \gamma_k(H_k X_k), \Gamma^i(y_{k+1})\rangle a_i + \gamma_k(\alpha_{k+1}\langle X_k, \Gamma^i(y_{k+1})\rangle) a_i \\ \quad + \gamma_k(\alpha_{k+1}\langle X_k, \Gamma^i(y_{k+1})\rangle) f(y_{k+1}) a_i \\ \quad + (diag(a_i) - a_i a_i') \gamma_k(\beta_{k+1}\langle X_k, \Gamma^i(y_{k+1})\rangle) \end{array} \right\},$$

dimana $a_i = Ae_i$ dan $\Gamma^i(y_{k+1}) := \frac{\phi\left(\frac{y_k - c_{(.)}}{\sigma_{(.)}}\right)}{\sigma_{(.)}\phi(y_k) e_{(.)}}$.

Penduga Rekursif untuk Peoses Observasi Model Diskrit

Banyak kejadian X_{l-1} berada pada *state* $e_r, 1 \leq r \leq N$, dan Y_l berada pada *state* $f_s, 1 \leq s \leq M$, sampai waktu ke-k, didefinisikan

$$\mathcal{J}_k^{rs} = \sum_{l=1}^{k} \langle X_{l-1}, e_r\rangle \langle Y_l, f_s\rangle, \quad 1 \leq r \leq N, \quad 1 \leq s \leq M,$$

maka

$$\mathcal{J}_k^{rs} = \mathcal{J}_k^{rs} + \langle\langle X_k, e_r\rangle f_s, Y_{k+1}\rangle.$$

Untuk $H_{k+1} = \mathcal{T}_{k+1}^{rs}$, $H_0 = 0$, $\alpha_l = \beta_l = 0$, $\delta_l = \langle X_{l-1}, e_r\rangle f_s$ pada Teorema 4.4.2 dan dengan Notasi 4.4.5 dapat diperoleh

$$\gamma_{k+1,k+1}(\mathcal{T}_{k+1}^{rs}) = \sum_{j=1}^{N}\{c_j(Y_{k+1})\langle \gamma_{k,k}(\mathcal{T}_k^{rs}), e_j\rangle a_j\} + M\langle q_k, e_r\rangle\langle Y_{k+1}, f_s\rangle c_{sr} a_r.$$

Bentuk unnormalized smoother untuk $\mathcal{T}_m^{rs}$ dengan mengambil $H_{k+1} = H_k = \mathcal{T}_m^{rs}$, $k+1 > m$, $\alpha_l = \beta_l = \delta_l = 0$ diperoleh

$$\gamma_{m,k+1}(\mathcal{T}_m^{rs}) = \sum_{j=1}^{N} c_j(Y_{k+1})\langle \gamma_{m,k}(\mathcal{T}_k^{rs}), e_j\rangle a_j.$$

Nilai Dugaan $\hat{Y}_{k+1}$ Model Diskrit

Lema (Nilai Harapan Bersyarat Y_{k+1})

Nilai harapan bersyarat Y_{k+1} jika diketahui $\mathcal{Y}_k$ adalah

$$\hat{Y}_{k+1} = E[Y_{k+1}|\mathcal{Y}_k] = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} c_{ji} q_k(e_i) f_j,$$

dengan $q_k(e_i) = P(X_k = e_i|\mathcal{Y}_k)$

Bukti :

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{k+1} &= E[Y_{k+1}|\mathcal{Y}_k]\\ &= \sum_{j=1}^{M} P(Y_{k+1} = f_j|\mathcal{Y}_k) f_j\\ &= \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} P(Y_{k+1} = f_j, X_k = e_i|\mathcal{Y}_k) f_j\\ &= \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} P(Y_{k+1} = f_j|X_k = e_i) P(X_k = e_i|\mathcal{Y}_k) f_j\\ &= \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} c_{ji} P(X_k = e_i|\mathcal{Y}_k) f_j\\ &= \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} c_{ji} q_k(e_i) f_j \quad .\end{aligned}$$

■

Penduga Rekursif untuk Proses Observasi Model Kontinu

Parameter $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)^T$ dan $c = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T$ pada proses observasi $Y_{k+1} = c(X_k) + \sigma(X_k)\omega_{k+1}, k \in \mathbb{N}$, diduga ulang dengan menggunakan penduga berikut ini.

$$\mathcal{T}_{k+1}^r(f) := \sum_{l=1}^{k+1}\langle X_{l-1}, e_r\rangle f(Y_l), 1 \le r \le N$$

$$= \mathcal{T}_k^r(f) + \langle X_k, e_r\rangle f(Y_{k+1}),$$

dimana $f(Y) = Y \; atau \; f(Y) = Y^2$.

Dari Teorema 4.4.6 (Elliott *et al.*, 1995) dan definisi $\mathcal{T}_{k+1}^r(f)$ didapatkan penduga rekursif proses observasi

$$\gamma_{k+1,k+1}(\mathcal{T}_{k+1}^r(f)) = \sum_{i=1}^{N}\langle \gamma_{k,k}(\mathcal{T}_k^r(f)), \Gamma^i(Y_{k+1})\rangle a_i + \langle \gamma_k(X_k), \Gamma^i(Y_{k+1})\rangle f(Y_{k+1}) a_r \; .$$

Bukti:

Berdasarkan teorema 4.4.6 (Elliott *et al.*, 1995) dan definisi $\mathcal{T}_{k+1}^r(f)$, dan dengan menggunakan $H_{k+1} = \mathcal{T}_{k+1}^r(f), H_0 = 0, \alpha_{k+1} = 0, \beta_{k+1} = 0, dan \; \delta_{k+1} = \langle X_k, e_r\rangle$ didapatkan

$$\begin{aligned}&\gamma_{k+1,k+1}(\mathcal{T}_{k+1}^r(f))\\ &= \sum_{i=1}^{N}\langle \gamma_k(\mathcal{T}_k^r(f) X_k), \Gamma^i(Y_{k+1})\rangle a_i + \gamma_k(\langle X_k, e_r\rangle\langle X_k, \Gamma^i(Y_{k+1})\rangle) f(Y_{k+1}) a_r\\ &= \sum_{i=1}^{N}\langle \gamma_k(\mathcal{T}_k^r(f) X_k), \Gamma^i(Y_{k+1})\rangle a_i + \gamma_k(\langle X_k, \Gamma^i(Y_{k+1})\rangle) f(Y_{k+1}) a_r\\ &= \sum_{i=1}^{N}\langle \gamma_{k,k}(\mathcal{T}_k^r(f)), \Gamma^i(Y_{k+1})\rangle a_i + \langle \gamma_k(X_k), \Gamma^i(Y_{k+1})\rangle f(Y_{k+1}) a_r.\end{aligned}$$

■

Dengan langkah yang serupa dan mengambil nilai $H_{k+1} = H_m = \mathcal{T}_m^r(f), H_0 = 0, \alpha_{k+1} = 0, \beta_{k+1} = 0, \text{dan } \delta_{k+1} = 0$ untuk $k > m$ didapatkan bentuk *unnormalized smoother* dari $\mathcal{T}_{k+1}^r(f)$ jika diketahui filtrasi $\mathcal{Y}_{k+1}$, $\bar{E} = [\Lambda_{k+1}\mathcal{T}_m^r(f) X_{k+1}|\mathcal{Y}_{k+1}]$, adalah

$$\gamma_{m,k+1}(\mathcal{T}_m^r(f)) = \sum_{i=1}^{N}\langle \gamma_{m,k}(\mathcal{T}_m^r(f)), \Gamma^i(Y_{k+1})\rangle a_i.$$

Nilai Dugaan $\hat{Y}_{k+1}$ Model Kontinu

Lema (Nilai Harapan Bersyarat Y_{k+1})

Nilai harapan bersyarat Y_{k+1} jika diketahui $\mathcal{Y}_k$ adalah

$$\hat{Y}_{k+1} = E[Y_{k+1}|\mathcal{Y}_k] = \sum_{i=1}^{N}\langle \hat{X}_k, e_i\rangle(c_i),$$

dimana $\hat{X}_k = E[X_k|Y_k]$.

Bukti:

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{k+1} &= E[Y_{k+1}|\mathcal{Y}_k] \\
&= \sum_{i=1}^{N}\langle \hat{X}_k, e_i\rangle \int_{-\infty}^{\infty} Y_{k+1}\phi_i(Y_{k+1}-c_i)dY_{k+1} \\
&= \sum_{i=1}^{N}\langle \hat{X}_k, e_i\rangle\Big(c_i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\omega_{k+1})^2}{2}\right)d(\omega_{k+1}) \\
&\quad + \sigma_i \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{k+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(\omega_{k+1})^2}{2}\right)d(\omega_{k+1})\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\langle \hat{X}_k, e_i\rangle(c_i)
\end{aligned}$$

PENUTUP

Untuk mendapatkan paramater baru yang digunakan untuk menduga parameter pada Model *Hidden* Markov membutuhkan pendugaan rekursif. Salah satu dari empat penduga rekursif model ini adalah

1. Penduga rekursif untuk proses observasi model diskrit dan nilai dugaannya:
   - $(\mathcal{J}_{k+1}^{rs}) = \sum_{j=1}^{N}\{c_j(Y_{k+1})\langle \gamma_{k,k}(\mathcal{J}_k^{rs}), e_j\rangle a_j\} + M\langle q_k, e_r\rangle\langle Y_{k+1}, f_s\rangle c_{sr} a_r,$
   - Bentuk *unnormalized smoother*
     $\gamma_{m,k+1}(\mathcal{J}_m^{rs}) = \sum_{j=1}^{N} c_j(Y_{k+1})\langle \gamma_{m,k}(\mathcal{J}_k^{rs}), e_j\rangle a_j,$
   - $\hat{Y}_{k+1} = E[Y_{k+1}|\mathcal{Y}_k] = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} c_{ji} q_k(e_i) f_j.$
2. Penduga rekursif untuk proses observasi model kontinu dan nilai dugaannya:
   - $\gamma_{k+1,k+1}\big(\mathcal{J}_{k+1}^{r}(f)\big) = \sum_{i=1}^{N}\langle \gamma_{k,k}\big(\mathcal{J}_k^{r}(f)\big), \Gamma^i(Y_{k+1})\rangle a_i + \langle \gamma_k(X_k), \Gamma^i(Y_{k+1})\rangle f(Y_{k+1}) a_r,$
   - Bentuk *unnormalized smoother*
     $\gamma_{m,k+1}\big(\mathcal{J}_m^{r}(f)\big) = \sum_{i=1}^{N}\langle \gamma_{m,k}\big(\mathcal{J}_m^{r}(f)\big), \Gamma^i(Y_{k+1})\rangle a_i,$
     $\hat{Y}_{k+1} = E[Y_{k+1}|\mathcal{Y}_k] = \sum_{i=1}^{N}\langle \hat{X}_k, e_i\rangle(c_i)$

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis menyampaikan terima kasih kepada Ibunda, Hj. Zubaedah yang selalu mendoakan yang terbaik untuk anak-anaknya, dan dan dukungan terbaik dari Alm. Ayahanda, H. Azhari selama beliau masih mendampingi kami, istri dan anak-anakku, serta keluarga besar yang selalu mendukung, baik secara moril maupun materiil, dalam penelitian ini. Terimakasih juga disampaikan kepada Dr. Berlian Setiawaty, M.S. dan Ir. N. K. Kutha Ardana, M.Sc. yang telah banyak membantu mengarahkan penelitian dalam kajian model.

REFERENSI

Billingsley, P. 1995. *Probability and Measure,*Third Edition. John Willey & Sons. New York.

Elliott, R. J., Aggoun, L, Moore, J.B. 1995. *Hidden Markov Models. Estimation and Control.* Springer-Verlag. New York.

Ghahramani, Saeed. 2018.*Fundamentals of Probability: With Stochastic Processes*, 4rd Editionn CRC Press.

Hogg, Robert V., Joseph W. McKean, dan Allen Thornton Craig. 2013. *Introduction to Mathematical Statistics*. Pearson.

Leon, S. J. 2014. *Linear Algebra (Custom Edition)*. Pearson Education Australia.

Roger, Patrick. 2010. *Probability for Finance*. Bookboon, t.t. Ventus Publishing ApS.

Ross, Sheldon M. 2008. *STOCHASTIC PROCESSES, 2ND ED*. Wiley India Pvt. Limited.

Setiawaty, B., Kristina L. 2005. Pendugaan Parameter Model *Hidden* Markov. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya* 4: 23-39

Walpole, Ronald E. 2017. *Probability and Statistics for Engineer and Scientiest*, 9th Edition. New York: Macmillan Publishing Company.

Walpole, Ronald E., Raymond H. Myers, Sharon L. Myers, dan Keying Ye. *Probability & Statistics for Engineers & Scientists*. Pearson Education South Asia Pte Limited, 2017.

Wong, E. and Hajek, B. 1985. *Stochastic Process in Engineering System*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.