Imajiner: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
ISSN (Online): 2685-3892
Vol. 7, No. 6, November 2025, Hal. 684-695
Available Online at journal.upgris.ac.id/index.php/imajiner

Algoritma Penyelesaian Matriks Fuzzy Tak Persegi dengan Invers Moore-Penrose

Widya Rizky Fadhilla[1], Budi Surodjo[2]
[1]Universitas Nahdlatul Ulama Al-Ghazali Cilacap
[2]Universitas Gadjah Mada
[1]wrfadhilla@gmail.com

ABSTRAK

Artikel ini menyajikan mengenai algoritma untuk menyelesaikan sistem persamaan matriks fuzzy tak persegi dengan bentuk umum sistem yang dikaji adalah $\tilde{X}A = \tilde{Y}$ dengan A merupakan matriks krispi tak persegi dan $\tilde{Y}$ adalah matriks fuzzy. Hal ini dikaji karena sistem linear dalam dunia nyata seringkali melibatkan ketidakpastian yang dapat dimodelkan dengan fuzzy. Metode yang dikembangkan merupakan perluasan dari teknik perluasan Friedmann dengan melakukan dekomposisi matriks A ke dalam partisi tak negatif dan membentuk matriks perluasan S. Metode ini memanfaatkan konsep invers moore-penrose matriks fuzzy serta konsep perluasan pada matriks fuzzy untuk mendapatkan solusi fuzzy minimal. Solusi fuzzy minimal dapat berupa solusi lemah dan solusi kuat dikarenakan solusi tunggal berkemungkinan tidak ada atau tidak dapat ditemukan secara langsung. Hasilnya berupa solusi fuzzy yang unik dan optimal dalam konteks matriks fuzzy tak persegi.

Kata Kunci: Sistem Persamaan Matriks Fuzzy; Matrisk Tak Persegi; Solusi Fuzzy Minimal; Invers Moore-Penrose.

ABSTRACT

This article presents an algorithm for solving systems of non-square fuzzy matrix equations of the general form $\tilde{X}A = \tilde{Y}$ dengan $\tilde{A}$ is a crisp non-square matrix and $\tilde{Y}$ is a fuzzy matrix. This study is motivated by the fact that real-world linear systems often involve uncertainty, which can be effectively represented using fuzzy models. The proposed method extends Friedman's expansion technique by decomposing the matrix A into nonnegative partitions and constructing an extended matrix S. The approach employs the concept of the fuzzy Moore–Penrose inverse together with the notion of fuzzy matrix extension to obtain a minimal fuzzy solution. The minimal fuzzy solution may exist as either a weak or a strong solution, since a unique solution may not always exist or be directly obtainable. The results demonstrate that the proposed method produces a unique and optimal fuzzy solution within the framework of non-square fuzzy matrices, thereby offering a generalization of the fuzzy matrix inversion technique for systems with uncertainty.

PENDAHULUAN

Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan linear yang saling berkaitan untuk mencari nilai variabel yang menemukan semua persamaan linear tersebut (Marzuki, 2018). Sistem persamaan linear tersebut dapat disajikan dalam bentuk matriks dengan entri-entrinya merupakan koefisien dari persamaan-persamaan linear dalam sistem yang akan diselesaikan. Namun, koefisien dan konstanta dalam sistem tersebut mengandung ketidakpastian informasi. Untuk merepresentasikan ketidakpastian tersebut, Zadeh (1965) memperkenalkan konsep himpunan fuzzy yang memungkinkan representasi data tidak pasti dalam bentuk bilangan fuzzy.

Salah satu pengaplikasian konsep fuzzy dalam memperlakukan sistem linear dengan semua atau sebagian parameternya dinyatakan sebagai bilangan fuzzy (Goetschell, 1986 dan Buckley, 1991). Teori mengenai himpunan fuzzy dikembangkan oleh Thomason (1977) ke dalam teori matriks fuzzy yaitu setiap entri dalam matriks merupakan bilangan fuzzy pada interval tertutup $[0, 1]$ (Kandasamy, 2007). Konsep matriks fuzzy kemudian diterapkan di berbagai bidang, seperti pengambilan keputusan, sistem kontrol, serta diagnosis medis, karena mampu menangani ketidakpastian informasi (Meenakshi, 2019).

Berbagai pendekatan dikembangkan untuk menyelesaikan sistem persamaan matriks fuzzy. Friedman et al (1998) memperkenalkan penyelesaian matriks fuzzy dengan konsep bilangan fuzzy simetris. Penelitian selanjutnya Otadi dan Mosleh (2012) mengembangkan metode penyelesaian persamaan matriks fuzzy untuk matriks persegi. Namun, terdapat kejadian yang tidak memungkinkan untuk dibentuk dalam matriks persegi. Jika bukan dalam matriks persegi, maka penyelesaian tidak dapat dilakukan melalui invers biasa. Guo (2017) mengembangkan penyelesaian sistem persamaan matriks fuzzy tak persegi dengan memanfaatkan konsep invers moore-penrose guna memperoleh solusi fuzzy minimal. Pendekatan Guo bersifat lebih umum karena mampu menangani sistem yang tidak memilik invers biasa.

Meskipun berbagai metode telah dikembangkan, sebagian besar penelitian masih terbatas pada kasus matriks persegi atau belum menguraikan langkah algoritmik penyelesaian yang terstruktur. Di sisi lain, persoalan sistem fuzzy tak persegi sering muncul dalam konteks nyata seperti estimasi parameter dan pemodelan sistem dengan data tidak lengkap. Oleh karena itu, diperlukan pendekatan yang lebih sistematis dan komputasional dalam memperoleh solusi fuzzy minimal yang bersifat unik dan optimal.

Penelitian ini memaparkan algoritma penyelesaian sistem persamaan matriks fuzzy tak persegi menggunakan konsep invers Moore–Penrose. Metode yang dikembangkan merupakan perluasan dari teknik Friedmann melalui dekomposisi matriks ke dalam partisi tak negatif dan pembentukan matriks perluasan. Selanjutnya, formulasi algoritmik enam langkah dapat menghasilkan solusi fuzzy minimal, baik dalam bentuk solusi lemah maupun solusi kuat, dengan validasi numerik yang mendemonstrasikan penerapannya dalam konteks sistem linear fuzzy tak persegi.

Struktur artikel ini adalah sebagai berikut. Konsep dasar bilangan fuzzy dan invers moore penrose. Selanjutnya penjelasan algoritma penyelesaian sistem persamaan matriks fuzzy tak persegi dan menurunkan solusi fuzzy minimal. Kemudian, diberikan contoh numerik untuk mengilustrasikan penerapan algoritma.

KONSEP DASAR

Bagian ini menguraikan konsep dasar yang digunakan dalam pengembangan algoritma penyelesaian sistem persamaan matriks fuzzy tak persegi menggunakan invers Moore–Penrose. Penjelasan meliputi definisi bilangan fuzzy, bentuk sistem persamaan yang dikaji, serta langkah-langkah algoritmik untuk memperoleh solusi fuzzy minimal.

1. Bilangan Fuzzy dan Matriks Fuzzy

Definisi 2.1

Suatu bilangan fuzzy $\tilde{v}$ Adalah himpunan fuzzy dengan pemetaan $\tilde{v}: \mathbb{R} \Rightarrow I = [0,1]$ yang memenuhi

1. $\tilde{v}$ semikontinu atas artinya untuk setiap ϵ positif, terdapat $\delta > 0,$ sehingga untuk setiap $y \in \mathbb{R}, |y - x| < \delta,$
2. $\tilde{v}$ fuzzy conveks dengan $v(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq min[\tilde{v}(x), \tilde{v}(y)]$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in [0.1],$

3. $\tilde{v}$ normal yaitu terdapat $x_0 \in \mathbb{R}$, sehingga $\tilde{v}(x_0) = 1$,
4. $supp\ \tilde{v} = \{x \in \mathbb{R} | \tilde{v}(x) > 0\}$ merupakan support $\tilde{v}$ dan klosur $cl(supp\ \tilde{v})$ kompak.

Selain itu, bilangan fuzzy dapat disajikan dalam bentuk parameter sebagai pasangan fungsi.

Definisi 2.2 (Guo, 2017)
Suatu bilangan fuzzy $\tilde{v}$ dalam bentuk parameter adalah pasangan terurut dari fungsi $[\underline{v}(r), \bar{v}(r)]$, $0 \leq r \leq 1$, yang memenuhi syarat-syarat sebagai berikut.

1. $\underline{v}(r)$ fungsi kontinu kiri monoton naik terbatas pada $[0, 1]$,
2. $\bar{v}(r)$ fungsi kontinu kiri monoton turun terbatas pada $[0, 1]$, dan
3. $\underline{v}(r) \leq \bar{v}(r)$ untuk setiap $r \in [0,1]$.

Sebuah matriks fuzzy A merupakan matriks yang setiap leemennya merupakan bilangan fuzzy. Matriks tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk $\tilde{A} = \left(\underline{A}(r), \bar{A}(r)\right) = [\tilde{a}_{ij}]$ dengan setiap dapat dinyatakan dalam bentuk parameter seperti di atas. Untuk operasi yang berlaku dalam matriks fuzzy Adalah sebagai berikut.

Definisi 2.3 (Guo, 2017)
Diberikan matriks $\tilde{A} = \left(\underline{A}(r), \bar{A}(r)\right), \tilde{B} = \left(\underline{B}(r), \bar{B}(r)\right)$ merupakan anggota himpunan matriks fuzzy dengan $0 \leq r \leq 1$ dan $k \in \mathbb{R}$, maka

1. $\tilde{A} = \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\underline{A}(r) = \underline{B}(r)$ dan $\bar{A}(r) = \bar{B}(r)$,
2. $\widetilde{A} + \widetilde{B} = \left(\underline{A}(r) + \underline{B}(r),\ \bar{A}(r) + \bar{B}(r)\right)$,
3. $\widetilde{A} - \widetilde{B} = \left(\underline{A}(r) - \underline{B}(r),\ \bar{A}(r) - \bar{B}(r)\right)$,
4. $k\tilde{A} = \begin{cases} \left(k\underline{A}(r), k\bar{A}(r)\right), k \geq 0 \\ \left(k\underline{A}(r), k\bar{A}(r)\right), k < 0 \end{cases}$

2. Perluasan Sistem dan Invers Moore Penrose.
Untuk kasus matrisk tak persegi, invers biasa tidak dapat diterapkan secara langsung. Oleh karena itu, digunakan pendekatan invers Moore-Penrose yang memberikan solusi minimal dalam norm Frobenius terkecil. Metode ini mengacu pada perluasan sistem Friedmann (1998) dengan membentuk dua partisi nonnegative dari matriks A yaitu $A_{n\times n} = T_{n\times n} - U_{n\times n}$.

Teorema 2.4
Matriks $S_{2n\times 2n}$ nonsingular jika dan hanya jika matriks-matriks $A_{n\times n} = T_{n\times n} - U_{n\times n}$ dan $T_{n\times n} + U_{n\times n}$ keduanya adalah nonsingular.

Bukti. Dimisalkan $S = \begin{pmatrix} T & U \\ U & T \end{pmatrix}$. Dilakukan penambahan baris ke$-(n + i)$ dari matriks S kepada baris ke-I untuk $i = 1, 2, \ldots, n$, artinya menambahkan partisi matriks baris kedua ke matriks baris pertama dinotasikan sebagai berikut.

$$S = \begin{pmatrix} T & U \\ U & T \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} T+U & T+U \\ U & T \end{pmatrix} = S_1$$

Selanjutnya dilakukan pengurangan kolom ke-j dari S_1 pada kolom ke-$(n + j)$ untuk $j = 1,2, \ldots, n$, artinya mengurangkan partisi matriks kolom pertama ke matriks kolom kedua dinotasikan sebagai berikut.

$$S = \begin{pmatrix} T+U & T+U \\ U & T \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} T+U & 0 \\ U & T-U \end{pmatrix} = S_2$$

Diperoleh $|S| = |S_1| = |S_2| = |T+U||T-U|$. Karena diketahui $A_{n\times n} = T_{n\times n} - U_{n\times n}$, maka

$$|S| = |T+U||T-U| = |T+U||A|.$$

Dengan kata lain, $|S| \neq 0$ jika dan hanya jika $|A| \neq 0$ dan $|T+U| \neq 0$. □

Selanjutnya akan dibahas mengenai solusi linear matriks fuzzy dengan mendiskusikan mengenai invers tergeneralisasi dari matriks S. Karena matriks S memiliki struktur khusus, yaitu

$$S = \begin{pmatrix} T & U \\ U & T \end{pmatrix},$$

maka berikut ini teorema-teorema yang berlaku sebagai solusi sistem linear matriks fuzzy.

Teorema 2.5.
Invers dari matriks non negatif

$$S = \begin{pmatrix} T & U \\ U & T \end{pmatrix}$$

adalah

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} D & E \\ E & D \end{pmatrix},$$

dengan

$$D = \frac{1}{2}[(T+U)^{-1} + (T-U)^{-1}] \text{ dan } E = \frac{1}{2}[(T+U)^{-1} - (T-U)^{-1}]$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 3.1 (Guo, 2017)
Suatu sistem matriks

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \cdots & \tilde{x}_{1n} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \cdots & \tilde{x}_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{x}_{m1} & \tilde{x}_{m2} & \cdots & \tilde{x}_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{11} & \tilde{y}_{12} & \cdots & \tilde{y}_{1p} \\ \tilde{y}_{21} & \tilde{y}_{22} & \cdots & \tilde{y}_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{y}_{n1} & \tilde{y}_{n2} & \cdots & \tilde{y}_{np} \end{bmatrix}$$

dengan entri a_{ij} anggota bilangan krispi dengan 1 ≤ i ≤ n dan 1 ≤ j ≤ p, entri $\widetilde{y_{ij}}$ anggota bilangan fuzzy dengan 1 ≤ i ≤ m, 1 ≤ j ≤ p disebut sistem persamaan matriks fuzzy. Sistem persamaan matriks fuzzy di atas dapat ditulis dengan menggunakan notasi matriks menjadi

$$\tilde{\mathrm{X}}\mathrm{A} = \tilde{\mathrm{Y}} \quad (1)$$

Selanjutnya, matriks fuzzy $X = (\underline{x_{ij}} + \bar{x}_{ij})$, dengan 1 ≤ i ≤ m, 1 ≤ j ≤ n, dan 0 ≤ r ≤ 1 dinamakan solusi persamaan matriks fuzzy (1) jika $\tilde{X}$ memenuhi $\tilde{X}A = \tilde{Y}$.

Untuk menyelesaikan persamaan matriks fuzzy tak persegi $\tilde{X}A = \tilde{Y}$ dilakukan pengembangan penyelesaian persamaan matriks fuzzy metode Friedmann yang semula diterapkan pada persamaan matriks fuzzy persegi dikembangkan untuk menyelesaikan matriks fuzzy tak persegi. Berdasarkan langkah-langkah penyelesaian persamaan matriks fuzzy metode Friedmann, dilakukan perluasan sistem matriks krispi dari matriks berukuran An×n menjadi matriks $S_{2n\times 2n}$ dengan syarat khusus sebagai berikut.

1. Matriks S dibentuk dari matriks A dengan struktur
$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{pmatrix}.$$
2. Partisi matriks S_1 merupakan matriks yang entri-entrinya berupa nila positif dari entri matriks A, yang lainnya bernilai nol.
3. Partisi matriks S_2 merupakan matriks yang entri-entrinya berupa nilai mutlak dari entri negatif matriks A, yang lainnya bernilai nol.

Syarat khusus tersebut kemudian diterapkan dalam teorema berikut ini.

Teorema 3.2.
Persamaan matriks fuzzy pada Definisi 3.1. dapat diperluas ke sistem matriks linear fungsi krispi sebagai
$$X(r)S = Y(r) \tag{2}$$
dengan
$$\tilde{X} = [\underline{X}_{mn}(r), -\bar{X}_{mn}(r)], S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{pmatrix}, dan\ \tilde{Y} = [\underline{Y}_{mn}(r), -\bar{Y}_{mn}(r)]$$
Elemen S_{ij}^1 merupakan elemen dari matriks S_1 dan S_{ij}^2 merupakan elemen dari matriks S_2 dapat ditentukan dengan cara berikut:

1. *jika* $a_{ij} \geq 0, s_{ij}^1 = a_{ij}$ *lainnya* $s_{ij}^1 = 0$, *untuk* $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ *dan*
2. *jika* $a_{ij} < 0, s_{ij}^2 = a_{ij}$ *lainnya* $s_{ij}^2 = 0$, *untuk* $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$.

Bukti. Dinotasikan matriks fuzzy kanan adalah $\tilde{Y}$ dengan $\tilde{Y} = [\underline{Y}(r), \bar{Y}(r)] = ([\underline{y}_{ij}(r), y_{ij}(r)]), 0 \leq r \leq 1$ dan matriks yang entri matriksnya tidak diketahui dinotasikan dengan $\tilde{X} = [\underline{X}_{mn}(r), \bar{X}_{mn}(r)] = ([\underline{x}_{ij}(r), \bar{x}_{ij}(r)])_{m\times n}$. Dibentuk $A = S_1 - S_2$ dengan elemen s_{ij}^1 dari matriks S_1 dan elemen s_{ij}^2 dari matriks S_2.
Untuk
$$S_1 = [s_{ij}^1] = \begin{cases} s_{ij} \geq 0, s_{ij}{}^1 = s_{ij} \\ \quad s_{ij}{}^1 = 0 \end{cases}$$
berlaku untuk 1 ≤ i ≤ n,1 ≤ j ≤ m. Sedangkan untuk
$$S_2 = [s_{ij}^2] = \begin{cases} s_{ij} < 0, s_{ij}{}^2 = s_{ij} \\ \quad s_{ij}{}^2 = 0 \end{cases}$$
berlaku untuk 1 ≤ i ≤ n,1 ≤ j ≤ m. Persamaan matriks fuzzy $\tilde{X}A = \tilde{Y} \Leftrightarrow \tilde{X}(S_1 - S_2) = \tilde{Y}$ dapat dinyatakan sebagai
$$[\underline{X}_{mn}(r), \overline{X}_{mn}(r)](S_1 - S_2) = |\underline{Y}(r), \overline{Y}(r)|. \tag{3}$$
Karena
$$x_{ij}k = \begin{cases} (k\underline{x}_{ij}(r), k\overline{x}_{ij}(r)), k \geq 0 \\ (k\overline{x}_{ij}(r), k\underline{x}_{ij}(r)), k < 0, \end{cases}$$
diperoleh
$$\tilde{X}A = \begin{cases} (\underline{X}_{mn}(r)A, \overline{X}_{mn}(r)A), A \geq 0 \\ (\overline{X}_{mn}(r)A, \underline{X}_{mn}(r)A), A < 0. \end{cases}$$
Kemudian, persamaan (2) dapat ditulis menjadi
$$[\underline{X}_{mn}(r), \overline{X}_{mn}(r)]\, S_1 - [\underline{X}_{mn}(r), \overline{X}_{mn}(r)]\, S_2 = [\underline{Y}(r), \overline{Y}(r)]$$

$$\Leftrightarrow [\underline{X}_{mn}(r)S_1, \overline{X}_{mn}(r)S_1] - [\underline{X}(r)S_2, \overline{X}_{mn}(r)S_2] = [\underline{Y}(r), \overline{Y}(r)]$$
$$\Leftrightarrow [\underline{X}_{mn}(r)S_1 - \overline{X}_{mn}(r)S_2, \overline{X}_{mn}(r)S_1 - \underline{X}_{mn}(r)S_2] = [\underline{Y}(r), \overline{Y}(r)],$$

Sehingga

$$\begin{cases} \underline{X}_{mn}(r)S_1 - \overline{X}_{mn}(r)S_2 = \underline{Y}(r) \\ \overline{X}_{mn}(r)S_1 + \underline{X}_{mn}(r)S_2 = \overline{Y}(r) \end{cases} \tag{4}$$

Persamaan (4) dijumlahkan menjadi

$$(\underline{X}_{mn}S_1 - \overline{X}_{mn}S_2) + (\overline{X}_{mn}S_1 - \underline{X}_{mn}S_2) = \underline{Y} + \overline{Y}.$$

Selanjutnya, persamaan di atas dinotasikan dalam bentuk matriks menjadi

$$[\underline{X}_{mn}(r), \overline{X}_{mn}(r)] \begin{pmatrix} S_1 & -S_2 \\ -S_2 & S_1 \end{pmatrix} = [\underline{Y}(r), \overline{Y}(r)].$$

□

Penyelesaian matriks memiliki 3 kemungkinan penyelesaian, yaitu sistem memiliki penyelesaian, tidak memiliki solusi penyelesaian atau memiliki tak hingga solusi. Untuk sistem linear dengan penyelesaiannya berupa matriks singular, maka sistem tersebut tidak memiliki solusi penyelesaian atau memiliki tak hingga solusi, sedangkan sistem linear dengan penyelesaiannya berupa matriks nonsingular, maka sistem tersebut memiliki solusi penyelesaian. Berdasarkan Teorema 2.4, penyelesaian metode Friedman tersebut dikembangkan untuk menyelesaikan matriks $\tilde{X}A = \tilde{Y}$ tak persegi.

Teorema 3.3.
Matriks S nonsingular jika dan hanya jika matriks $S_1 + S_2$ dan $S_1 - S_2$ keduanya merupakan nonsingular. Jika S nonsingular, maka

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (S_1 - S_2)^{-1} + (S_1 + S_2)^{-1} & (S_1 - S_2)^{-1} - (S_1 + S_2)^{-1} \\ (S_1 - S_2)^{-1} - (S_1 + S_2)^{-1} & (S_1 - S_2)^{-1} + (S_1 + S_2)^{-1} \end{pmatrix}$$

dengan $(S_1 + S_2)^{-1}$, $(S_1 - S_2)^{-1}$ merupakan matriks invers dari $S_1 + S_2$ dan $S_1 - S_2$. Namun pada kasus ini, solusi model persamaan (2) adalah sebagai berikut.

$$[\underline{X}_{mn}(r), -\overline{X}_{mn}(r)] = |\underline{Y}(r), -\overline{Y}(r)| \begin{pmatrix} S_1 & -S_2 \\ -S_2 & S_1 \end{pmatrix}^{-1}. \tag{5}$$

Bukti. Berdasarkan Teorema 2.4., berlaku S nonsingular jika dan hanya jika $S_1 + S_2$ dan $S_1 - S_2$ keduanya merupakn nonsingular. Dimisalkan $S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{pmatrix}$. Dilakukan penambahan baris ke-(n+i) dari matriks S kepada baris ke-i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ artinya menambahkan partisi matriks baris kedua ke matriks baris pertama dinotasikan sebagi berikut.

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & -S_2 \\ -S_2 & S_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} S_1 - S_2 & -S_2 + S_1 \\ -S_2 & S_1 \end{pmatrix} = S_a.$$

Selanjutnya, dilakukan pengurangan kolom ke-j dari $S1$ pada kolom ke-(n+j) untuk $j = 1, 2, \dots, n$ artinya mengurangjan partisi matriks kolom pertama ke matriks kolom kedua dinotasikan sebagai berikut.

$$S_1 = \begin{pmatrix} S_1 - S_2 & S_1 - S_2 \\ -S_2 & S_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} S_1 - S_2 & 0 \\ -S_2 & S_1 + S_2 \end{pmatrix} = S_b.$$

Diperoleh $|S| = |S_a| = |S_b| = |S_1 - S_2| + |S_1 + S_2|$. Karena diketahui $A_{n\times n} = S_1 - (-S_2)$, maka

$$|S| = |S_1 - S_2||S_1 + S_2| = |S_1 - S_2||A|.$$

Dengan kata lain, $|S| \neq 0$ jika dan hanya jika $|A| \neq 0$ dan $|S_1 - S_2| \neq 0$.

Karena $S_1 - S_2$ dan $S_1 + S_2$ nonsingular, maka $|S_1 - S_2| \neq 0, |S_1 + S_2| \neq 0$ sehingga berakibat $|S| \neq 0$. Berdasarkan Teorema 2.5, misalkan invers dari S adalah

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ E & F \end{pmatrix}$$

dengan
$$E = \tfrac{1}{2}(S_1 - S_2)^{-1} + (S_1 + S_2)^{-1} \text{ dan } F = \tfrac{1}{2}(S_1 - S_2)^{-1} - (S_1 + S_2)^{-1}.$$

Akan dibuktikan S^{-1} merupakan invers dari S, maka haruslah memenuhi
$$SS^{-1} = I.$$

Berarti
$$\begin{pmatrix} S_1 & -S_2 \\ -S_2 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Diperoleh
$$S_1E - S_2F = 1, \tag{6}$$
$$S_2E - S_1F = 0. \tag{7}$$

Selanjutnya, dilakukan penjumlahan pada Persamaan (6) dan (7) sehingga diperoleh
$$S_1E + S_2E - S_1F - S_2F = 1 \quad \Leftrightarrow (S_1 + S_2)E - (S_2 + S_1)F = 1.$$

Kedua ruas persamaan di atas dikalikan dengan $(S_1 + S_2)^{-1}$, sehingga diperoleh
$$(S_1 + S_2)^{-1}\left((S_1 + S_2)E - (S_2 + S_1)F\right) = (S_1 + S_2)^{-1}$$
$$\Leftrightarrow E - F = (S_1 + S_2)^{-1}.$$

Persamaan (6) dan (7) dilakukan pengurangan sehingga diperoleh hasil
$$S_1E - S_2E + S_1F - S_2F = 1 \quad \Leftrightarrow (S_1 - S_2)E + (S_1 - S_2)F = 1.$$

Kedua ruas persamaan di atas dikalikan dengan $(S_1 - S_2)^{-1}$, sehingga diperoleh
$$(S_1 - S_2)^{-1}\left((S_1 - S_2)E + (S_1 - S_2)F\right) = (S_1 - S_2)^{-1}$$
$$\Leftrightarrow E + F = (S_1 - S_2)^{-1},$$

maka
$$E + F = (S_1 - S_2)^{-1}, \tag{8}$$
$$E - F = (S_1 + S_2)^{-1}. \tag{9}$$

Persamaan (8) dan (9) dilakukan pengurangan sehingga diperoleh hasil
$$E = \frac{1}{2}\left((S_1 - S_2)^{-1} + (S_1 + S_2)^{-1}\right).$$
$$F = \frac{1}{2}\left((S_1 - S_2)^{-1} - (S_1 + S_2)^{-1}\right),$$

Sehingga dengan mengambil
$$E = \tfrac{1}{2}\left((S_1 - S_2)^{-1} + (S_1 + S_2)^{-1}\right) \text{ dan } F = \tfrac{1}{2}\left((S_1 - S_2)^{-1} - (S_1 + S_2)^{-1}\right),$$

maka $S^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & E \end{pmatrix}$ adalah invers dari $S = \begin{pmatrix} S_1 & -S_2 \\ -S_2 & S_1 \end{pmatrix}$.

Jadi, terbukti bahwa
$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}((S_1 - S_2)^{-1} + (S_1 + S_2)^{-1}) & \frac{1}{2}((S_1 - S_2)^{-1} - (S_1 + S_2)^{-1}) \\ \frac{1}{2}((S_1 - S_2)^{-1} - (S_1 + S_2)^{-1}) & \frac{1}{2}((S_1 - S_2)^{-1} + (S_1 + S_2)^{-1}) \end{pmatrix}$$

merupakan invers dari perluasan matriks nonnegatif S.

□

Lemma 3.4.

Jika $S = \begin{pmatrix} S_1 & -S_2 \\ -S_2 & S_1 \end{pmatrix}$, maka matriks
$$S^{\dagger} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (S_1 - S_2)^{\dagger} + (S_1 + S_2)^{\dagger} & (S_1 - S_2)^{\dagger} - (S_1 + S_2)^{\dagger} \\ (S_1 - S_2)^{\dagger} - (S_1 + S_2)^{\dagger} & (S_1 - S_2)^{\dagger} + (S_1 + S_2)^{\dagger} \end{pmatrix}$$

merupakan invers Moore-Penrose dari matriks S dengan $(S_1 + S_2)^\dagger$ invers Moore Penrose dari matriks $S_1 + S_2$dan $(S_1 - S_2)^\dagger$ invers Moore Penrose dari matriks $S_1 - S_2$.

Sistem penyelesaian matriks fuzzy memiliki 3 kemungkinan penyelesaian. Salah satunya adalah jika matriks A matriks singular atau matriks tak persegi, maka persamaaan linear tersebut mungkin memiliki penyelesaian tak tunggal. Untuk itu, perlu adanya pembahasan mengenai solusi penyelesaian minimal, sebab ketika terdapat dua atau lebih penyelesaian maka solusi penyelesaian minimal dapat mencakup hal tersebut. Solusi penyelesaian minimal ini bersifat unik, yaitu berupa panjang norm terkecil dari solusi yang ada. Oleh karena itu, definisi norm minimal *Frobenius* diperlukan sebelum membahas teorema terkait dengan solusi minimal pada persamaan matriks fuzzy.

Definisi 3.5 (Gong, 2011)
Diberikan matriks $C \in \mathbb{R}_{m\times n}$ matriks $s \in \mathbb{R}_{n\times p}$ dan matriks $X_{m\times p}$. Matriks X merupakan norm minimal $Frobenius$ dari $(C - XS)$ dengan definisi

$$\|\text{C-XS}\|_F = \min \|C - XS\|_F^2$$
$$= \sum_j \sum_{i=1}^{m} \left\| \underline{c_{ij}} - \sum_{k=1}^{n} x_{ik}s_{kj} \right\|_F^2 + \left\| \overline{c_{ij}} - \sum_{k=1}^{n} x_{m+i,k}s_{kj} - x_{m+i,n+k}s_{kj} \right\|.$$

Konsep norm matriks fuzzy sendiri merupakan pengambangan dari konsep norm pada matriks biasa dengan kasus khusus, yaitu entri-entri matriks berupa anggota fuzzy. Penelitian ini menggunakan Norm Minimal Frobenius dengan definisi $\|\text{A}\|_F = \min \|A\|_F^2 = \min \sqrt{\sum_j \sum_{i=1}^{m} \|a_{ij}\|^2}$

Sebab norm tersebut membantu untuk mendapatkan norm/panjang terkecil dari solusi-solusi yang ada, sehingga dapat diperoleh solusi mnimal dari persamaan matrisk fuzzy yang diberikan. Selanjutnya akan dibahas mengenai bentuk solusi minmal Persamaan (2) dari Teorema 3.2.

Teorema 3.6.
Jika matriks $S_{n\times p} \in \mathbb{R}_{n\times p}$ dan matriks $C_{m\times p} \in \mathbb{R}_{m\times p}$, maka solusi minimal X^* dari persamaan matriks $XS = C$ adalah $X^* = CS^\dagger$.

Bukti. Persamaan $XS = C$ ditulis dalam bentuk blok matriks menjadi

$$X_i S = C_i, i = 1.2, \cdots, m$$

dengan X_i merupakan baris ke-i dari matriks X dan B_i merupakan baris ke-i dari matriks S.

Berdasarkan teori matriks, persamaan matriks $XS = C$ dikatakan konsisten jika dan hanya jika setiap persamaan linear $x = C_i, i = 1,2, . . , m$ konsisten dan persamaan $XS = C$ inkonsisten jika dan hanya jika paling tidak terdapat satu persamaan linear $xS = C_i, i = 1,2, . . , m$ inkonsisten. Oleh karena itu, akan ditunjukkan solusi minimal pada dua kasus persamaan matriks, yaitu untuk persamaan konsisten dan inkonsisten. Untuk $XS = C$ konsisten, karena matriks S, C merupakan matriks tak persegi dan $XS = C$ konsisten, maka hasil dari $X^* = CS^\dagger$ merupakan solusi minimal (jelas). Untuk pernyataan $XS = C$ $||C - X^*S||_F^2 = \min ||C - XS||_F^2$ inkonsisten.

Ekuivalen dengan konsiai berikut.

$$||C_i - X_i^*S||_F^2 = \min ||C_i - X_i^*S||_F^2, \quad i = 1, 2, ..., m$$

dengan

$$X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_m^* \end{pmatrix}$$

Solusi kuadrat terkecil dari persaamaan matriks $XS = C$ dan X_i^* solusi kuadrat terkecil dari persamaan linear $xS = C_i, i = 1,2,\ldots,m$ dan

$$\begin{aligned} ||C - XS||_F^2 &= \sum_{i=1}^{m} ||c_i - x_i S||_F^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} ||c_{ij} - x_{ik}s_{kj}||_F^2. \end{aligned}$$

Diketahui bahwa X_i^* solusi minimal persamaan linear inkonsisten $xS = C_i, i = 1,2,\ldots,m$ ekuivalen dengan

$$X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_m^* \end{pmatrix}$$

merupakan solusi minimal dari persamaan matriks inkonsisten $xS = C$. Diketahui bahwa solusi minimal persamaan matriks fuzzy dapat diseragamkan menjadi

$$X^* = CS^{\dagger}.$$

Berdasarkan penyelesaian persamaan pada Definisi 3.1, dibutuhkan persamaan matriks (4.7) sehingga diperoleh solusi minmal dari fungsi sistem linear tersebut adalah sebagai berikut.

$$X(r) = Y(r)S^{\dagger},$$

yaitu

$$[\underline{X}_{mn}(r), -\overline{X}_{mn}(r)] = [\underline{Y}(r), -\overline{Y}(r)] \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{pmatrix}^{\dagger} \qquad (10)$$

dengan $S^{\dagger}$ merupakan invers tergeneralisasi Moore-Penrose dari matriks S. □

Solusi tersebut disebut solusi fuzzy kuat apabila seluruh entri $\tilde{X}$ merupakan bilangan fuzzy yang memenuhi sifat monoton dan kontinu. Jika tidak memenuhi hal tersebut, solusi dari sistem dikategorikan sebagai solusi fuzzy lemah. Hal ini didefinisikan oleh Abbasbandy pada penelitiannya tahun 2008. Berikut ini merupakan definisi formalnya.

Definisi 3.7. (Abbasbandy, 2008)

Misalkan matriks $X = \{(\underline{x_j}(r), \overline{x_j}(r)), 1 \le j \le n\}$ merupakan solusi minimal dari persamaan $XS = Y$. Jika $\underline{y_i}(r), \overline{y_i}(r), 1 \le j \le m$ fungsi linear dari r dan $\underline{y_i}(1) = \overline{y_i}(1)$, maka vektor bilangan fuzzy $U = \{\underline{u_j}(r), \overline{u_j}(r), 1 \le j \le n\}$ didefinisikan sebagai

$$\underline{u_j}(r) = \min(\underline{x}_j(r),\ \overline{x}_j(r),\ \underline{x}_j(1),\ \overline{x}_j(1))$$
$$\overline{u_j}(r) = \max(\underline{x}_j(r),\ \overline{x}_j(r),\ \underline{x}_j(1),\ \overline{x}_j(1))$$

disebut solusi minimal fuzzy dari $XS = Y$. Jika $X = \{(\underline{x_j}(r), \overline{x_j}(r)), 1 \le j \le n\}$ semuanya merupakan bilangan fuzzy, maka $\underline{u_j}(r) = \underline{x_j}(r), \overline{u}_j(r) = x_j(r)$ dan U dinamakan solusi fuzzy minimal kuat. Sebaliknya, U merupakan solusi fuzzy mnimal lemah.

Selain itu, terdapat pula kasus tertentu dengan solusi matriksnya mungkin tidak sesuai dengan matriks bilangan fuzzy atau disebut sebagai solusi lemah. Penelitian ini memberikan batasan pembahasan pada bilangan fuzzy dengan $\underline{y_{ij}}(r), \bar{y}_{ij}(r), 1 \le i,j \le m$ dan berakibat

$\underline{y}_{ij}(r), \bar{y}_{ij}(r), a \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ merupakan semua fungsi linear dari r dan $X(r)$ dapat dihitung, sehingga $[\underline{X}(r), -\bar{X}(r)] = [\underline{Y}(r), -\bar{Y}(r)]\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{pmatrix}^{\dagger}$ dapat diselesaikan.

Bagian penting untuk membuat solusi matriks menjadi solusi matriks kuat adalah $X = Y(r)S^{\dagger}$ merupakan matriks fuzzy. Hal ini didasarkan pada Definisi 3.7 mengenai solusi fuzzy kuat dan solusi fuzzy lemah. Hal tersebut ekuivalen dengan kondisi $S^{\dagger} \geq 0$.

Teorema 3.8.
Jika hasil

$$(S_1 - S_2)^{\dagger} + (S_1 + S_2)^{\dagger} \geq 0, \text{ dan } (S_1 - S_2)^{\dagger} - (S_1 + S_2)^{\dagger} \geq 0$$

Maka persamaan matriks fuzzy pada Definsi 3.1. yaitu $\tilde{X}A = \tilde{Y}$ memiliki solusi minimal fuzzy kuat sebagai berikut.

$$\tilde{X} = [\underline{X}_{m\times n}(r), \bar{X}_{m\times n}(r)]$$

dengan

$$\begin{cases} \underline{X}_{mn}(r) = \underline{Y}(r)E - \bar{Y}(r)F \\ \bar{X}_{mn}(r) = -\underline{Y}(r)F + \bar{Y}(r)E \\ E = \frac{1}{2}((S_1 - S_2)^{\dagger} + (S_1 + S_2)^{\dagger}) \\ F = \frac{1}{2}((S_1 - S_2)^{\dagger} - (S_1 + S_2)^{\dagger}) \end{cases}$$

Bukti. Misalkan

$$\begin{aligned} S^{\dagger} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & E \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (S_1 - S_2)^{\dagger} + (S_1 + S_2)^{\dagger} & (S_1 - S_2)^{\dagger} - (S_1 + S_2)^{\dagger} \\ (S_1 - S_2)^{\dagger} - (S_1 + S_2)^{\dagger} & (S_1 - S_2)^{\dagger} + (S_1 + S_2)^{\dagger} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sebelumnya, diperoleh bahwa $S^{\dagger} \geq 0$ ekuivalen dengan $E \geq 0, F \geq 0$. Karena $\tilde{Y} = [\underline{Y}(r), \overline{Y}(r)]$, maka $\underline{Y}(r)$ merupakan matriks fungsi kontinu monoton naik terbatas dan $\overline{Y}(r)$ merupakan matriks fungsi kontinu monoton turun terbatas dengan $\underline{Y}(r) \leq \bar{Y}(r), 0 \leq r \leq 1$ sesuai dengan definisi 2.2.

Berdasarkan Persamaan (5), diperoleh

$$\begin{aligned} [\underline{X}_{mn}(r), \overline{X}_{mn}(r)] &= [\underline{Y}(r), \ -\overline{Y}(r)]\begin{pmatrix} S_1 & -S_2 \\ -S_2 & S_1 \end{pmatrix}^{\dagger} \\ &= [\underline{Y}(r), \ -\overline{Y}(r)]\begin{pmatrix} E & F \\ F & E \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Sehingga

$$\underline{X}_{mn}(r) = \underline{Y}(r)E - \overline{Y}(r)F \tag{11}$$

$$-\overline{X}_{mn}(r) = \underline{Y}(r)F - \overline{Y}(r)E, \tag{12}$$

sehingga $E \geq 0, F \geq 0$ dengan $\underline{X}(r)$ fungsi kontinu kiri monoton naik terbatas dengan $\bar{X}(r)$ matriks fungsi kontinu kiri monoton turun terbatas. Selanjutnya dilakukan penjumlahan Persamaan (11) dan (12)

$$\begin{aligned}\overline{X}_{mn}(r)-\underline{X}_{mn}(r)&=\underline{Y}(r)E+\underline{Y}(r)F-\overline{Y}(r)F-\overline{Y}(r)E\\&=\left(\overline{Y}(r)-\underline{Y}(r)\right)E+\left(\overline{Y}(r)-\underline{Y}(r)\right)F\\&=\left(\overline{Y}(r)-\underline{Y}(r)\right)(E+F)\\&=\left(\overline{Y}(r)-\underline{Y}(r)\right)(S_1+(-S_2))^{\dagger}\geq 0,\end{aligned}$$

Maka persamaan matriks fuzzy $\tilde{X}A=\tilde{Y}$ memiliki solusi minimal fuzzy kuat. □

Berdasarkan teorema sebelumnya, diperoleh hasil bahwa S^{-1} dan $S^{\dagger}$ merupakan matriks nonnegatif sedangkan S^T merupakan notasi dari transpos matriks S.
Berdasarkan pembahasan di atas, penyelesaian persamaan matriks fuzzy dapat diperoleh dengan langkah-langkah berikut ini.

1. Membentuk matriks S_1 dan S_2 dari perluasan matriks A dengan ketentuan khusus, yaitu matriks S_1 berukuran $m\times m$ adalah matriks yang memuat entri-entri positif dari matriks $A_{m\times m}$, sedangkan entri yang lainnya bernilai nol sedangkan matriks S_2 berukuran $m\times m$ adlaah matriks yang memuat nilai mutlak entri-entri negatif dari matriks $A_{m\times m}$ yang lainnya bernilai nol.
2. Mencari invers dari perluasan matriks A menggunakan persamaan
$$S^{\dagger}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(S_1-S_2)^{-1}+(S_1+S_2)^{-1} & (S_1-S_2)^{-1}-(S_1+S_2)^{-1}\\(S_1-S_2)^{-1}-(S_1+S_2)^{-1} & (S_1-S_2)^{-1}+(S_1+S_2)^{-1}\end{pmatrix}$$
Dengan $(S_1+S_2)^{-1},(S_1-S_2)^{-1}$ merupakan matriks invers dari S_1+S_2 dan S_1-S_2 dengan memanfaatkan Persamaan Moore-Penrose $(S_1-S_2)Z_1(S_1-S_2)=(S_1-S_2)$ dan $(S_1+S_2)Z_1(S_1+S_2)=(S_1+S_2)$.
3. Menggunakan persaman $S\tilde{X}=Y(r)$ untuk mendapatkan nilai X sebagai salah satu solusi dari sistem yang berkorespondensi dengan S^{-1}. Jika x merupakan bilangan fuzzy maka solusi tersebut berupa solusi fuzzy lemah sedangkan jika x merupakan bilangan fuzzy, maka solusi tersebut berupa solusi fuzzy kuat.
4. Membentuk matriks $S_1^1=(S_1-S_2)^{-1}+(S_1+S_2)^{-1}$ dan s $S_1^1=(S_1-S_2)^{-1}-(S_1+S_2)^{-1}$. Kemudian mencari invers dari $S_1'+S'_2$ dan $S_1'-S'_2$ dengan menggunakan Persamaan Moore-Penrose $(S_1-S_2)Z'_1(S_1-S_2)=(S_1-S_2)$ dan $(S_1+S_2)Z'_1(S_1+S_2)=(S_1+S_2)$.
5. Mencari Invers Moore-Penrose dari S^{-1}, yaitu
$$S^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(S_1-S_2)^{-1}+(S_1+S_2)^{-1} & (S_1-S_2)^{-1}-(S_1+S_2)^{-1}\\(S_1-S_2)^{-1}-(S_1+S_2)^{-1} & (S_1-S_2)^{-1}+(S_1+S_2)^{-1}\end{pmatrix}$$
Diharapkan dari $S^{\dagger}$ diperoleh solusi minimal fuzzy kuat.
6. Mengidentifikasi solusi minimal yang diperoleh berdasarkan Definisi 3.7 dan persamaan berikut.
$$\left[\underline{X}_{mn}(r),\overline{X}_{mn}(r)\right]=\left[\underline{Y}(r),\ -\overline{Y}(r)\right]\begin{pmatrix}S_1 & -S_2\\-S_2 & S_1\end{pmatrix}^{\dagger}$$
Sehingga diperoleh sistem tersebut memiliki solusi minimal fuzzy kuat atau solusi minimal fuzzy lemah.

Berdasarkan sifat invers Moore-Penrose, solusi yang diperoleh dari sistem tak persegi memiliki karakteristik berikut.

1. Solusi yang diperoleh unik dalam norm Frobenius minimal,

2. Dapat diklasifikasikan sebagai solusi kuat atau solusi lemah tergantung pada bentuk parametrik dari entri hasilnya.

PENUTUP

Berdasarkan analisis yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa metode penyelesaian sistem persamaan matriks fuzzy tak persegi yang dikembangkan berdasarkan pendekatan Guo (2017) merupakan prosedur yang efektif untuk memperoleh solusi fuzzy minimal. Pendekatan ini menggabungkan konsep perluasan matriks dengan syarat tertentu, invers Moore–Penrose pada matriks fuzzy, serta teori solusi minimal fuzzy, sehingga mampu menghasilkan solusi matriks fuzzy baik dalam bentuk solusi lemah maupun solusi kuat.

Algoritma yang diusulkan disajikan dalam enam langkah sistematis, dimulai dari pembentukan partisi matriks hingga perhitungan invers Moore–Penrose untuk memperoleh solusi minimal dalam norm Frobenius terkecil. Penelitian ini diharapkan dapat menjadi dasar bagi pengembangan lebih lanjut dalam penyelesaian sistem persamaan fuzzy yang lebih kompleks, seperti sistem dengan parameter berupa interval, penerapannya pada bidang pemodelan ketidakpastian dan optimisasi berbasis fuzzy.

UCAPAN TERIMAKASIH

We would like to thank all reviewers for valuable comments and suggestion.

REFERENSI

Abbasbandy, S., Otadi, M. & Mosleh, M. (2008). Minimal Solution of General Dual Fuzzy Linear Systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 37 (4), 1113-1124.

Buckley, J. J. & Qu, Y. (1991). Solving Systems of Linear Fuzzy Equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 43 (1), 33-43.

Friedman, M., Ming, M. & Kandel, A. (1998). Fuzzy Linear Systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 96 (2), 201-209.

Goetschel Jr, R. & Voxman, W. (1985). Eigen Fuzzy Number Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 16 (1), 75-85.

Gong, Z. & Guo, X. (2011). Inconsistent Fuzzy Matrix Equations and Its Fuzzy Least Squares Solutions. *Applied Mathematical Modelling*, 35 (3), 1456-1469.

Guo, X. & Zhang, K. (2017). Solving Fuzzy Matrix Equation of the Form XA=B. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 32 (3), 2771-2778.

Kandasamy, W. B. V., Smarandache, F. & Ilanthenral, K. (2007). *Elementary Fuzzy Matrix Theory and Fuzzy Models for Social Scientists*. Infinite Study: India.

Marzuki, C. C., Agustian, D. H., Afmilda, J., Husna, N., & Nanda, P. (2018). Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Fully Fuzzy menggunakan Metode Dekomposisi Nilai Singular (SVD), *Jurnal Matematika Mantik*, 4 (2), 143-149.

Meenakshi, A.R. 2019. *Fuzzy Matrix Theory and Applications*. MJP Publishers: India.

Otadi, M., & Mosleh, M. (2012) Solution of Fuzzy Matrix Equation System. International *Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2012, 1-10.

Thomason, M. G. (1977) Convergence of Powers of a Fuzzy Matrix. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 57, hal. 476-480.

Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8, hal. 338-353.