

Model Matematika Dinamika Perilaku *Bullying* dengan Intervensi Sekolah dan Resiliensi Siswa

Noraniza Bahrotul Ilmi¹, Muna Afdi Muniroh², Ratri Candra Hastari³, Nizarkasyi Fighar Prasetya⁴

^{1,3}Universitas Bhinneka PGRI

²Universitas PGRI Ronggolawe

⁴SMK PGRI 4 Pasuruan

¹noranizabi@gmail.com

ABSTRAK

Model penyebaran perilaku *bullying* dengan melibatkan intervensi sekolah berupa konseling dan pembinaan serta resiliensi siswa telah dikonstruksi. Analisis dinamik pada penelitian ini mencakup penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar (R_0) dan analisis sifat kestabilan titik kesetimbangan. Pada model, terdapat dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas *bullying* dan titik kesetimbangan dengan *bullying*. Berdasarkan hasil analisis diketahui bahwa titik kesetimbangan bebas *bullying* stabil asimtotik lokal ketika $R_0 < 1$, sebaliknya titik kesetimbangan dengan *bullying* stabil asimtotik lokal ketika $R_0 > 1$. Hasil simulasi numerik yang diperoleh sejalan dengan hasil analisis.

Kata Kunci: analisis dinamik; *bullying*; kestabilan; pemodelan matematika

ABSTRACT

In this study, a model of bullying behavior transmission was developed by incorporating school interventions and student resilience. Finding the equilibrium point, figuring out the basic reproduction number (R_0), and assessing the equilibrium point's stability are all part of dynamical analysis. Two equilibrium points are identified, namely the bullying-free equilibrium and the bullying-present equilibrium. The dynamical analysis result shows that the bullying-free equilibrium point is locally asymptotically stable if $R_0 < 1$, conversely, when $R_0 > 1$ the bullying-present equilibrium point is locally asymptotically stable. The numerical simulations result are consistent with the analytical result.

Keywords: dynamical analysis; bullying; stability; mathematical model

PENDAHULUAN

Bullying merupakan tindakan agresif yang dilakukan secara berulang terhadap individu atau kelompok tertentu (Rosmi *et al*, 2023). Pada umumnya perilaku *bullying* melibatkan ketidakseimbangan kekuasaan yaitu siswa yang menjadi korban *bullying* tidak dapat membela diri (Susanti *et al* 2023). Bentuk *bullying* diantaranya *bullying* fisik, verbal, sosial, dan *cyber bullying* (Al-Rahmi *et al*, 2018). Data menunjukkan bahwa *bullying* di sekolah masih menjadi persoalan yang serius. Rapor pendidikan 2022-2023 menunjukkan bahwa sekitar 24,4% siswa berpotensi mengalami *bullying* di sekolah. Kemendikbudristek menangani 127 kasus kekerasan dengan *bullying* menjadi bentuk kekerasan yang paling banyak ditemukan dalam periode 2021-2023. Pada tahun 2023 komisi perlindungan anak Indonesia (KPAI) menerima 3.877 laporan, diantaranya 329 terkait kekerasan di satuan pendidikan dimana *bullying* menjadi kasus yang dominan. *Bullying* memiliki beberapa dampak negatif terhadap korban misalnya gangguan kesehatan mental, penurunan prestasi akademik, putus sekolah atau bahkan potensi bunuh diri (Sari *et al*, 2025). Oleh karena itu, model matematika penting dikembangkan untuk memahami bagaimana dinamika perilaku *bullying* pada siswa.

Penelitian tentang pemodelan matematika perilaku *bullying* telah banyak dikembangkan. Misalnya, pada tahun 2021, Ashi telah menganalisis model penyebaran perilaku *bullying* dengan dua variable yaitu rentan dan pelaku. Pada penelitian ini siswa yang menjadi pelaku *bullying* mendapatkan intervensi berupa *drop out*. Penelitian lain tentang pemodelan matematika perilaku *bullying* juga telah dilakukan di Kabupaten Gowa menggunakan model persamaan diferensial S-B-P dengan adanya bimbingan dan konseling pada pelajar madrasah (Asya *et al*, 2024). Selanjutnya, model matematika penyebaran perilaku *bullying* dikonstruksi dengan melibatkan peran pendidikan keluarga dan memori tentang pengalaman *bullying* menggunakan turunan orde fraksional (Adenji *et al*, 2025).

Antisipasi perilaku *bullying* melalui program sekolah terbukti efektif dalam menurunkan kejadian *bullying*. Program *Positive Behavior Support* (BP-PBS) secara signifikan menurunkan perilaku *bullying* sekaligus meningkatkan respons positif dari korban dan saksi (Ross *et al*, 2013). Sementara itu, resiliensi dalam diri siswa terbukti menjadi faktor pelindung. Penelitian Astuti dkk (2018) menunjukkan bahwa *peer group support* dan resiliensi berpengaruh terhadap kemampuan coping adaptif siswa SMA). Resiliensi dapat membantu siswa menghadapi dampak psikologis *bullying* melalui keteguhan mental dan keyakinan diri. Penelitian Aliyev dan Gengec (2019) menunjukkan bahwa semakin tinggi resiliensi siswa maka semakin tinggi pula kepercayaan diri mereka. Peningkatan tingkat resiliensi siswa penting guna mencegah perilaku *bullying* di sekolah (Lu *et al*, 2022).

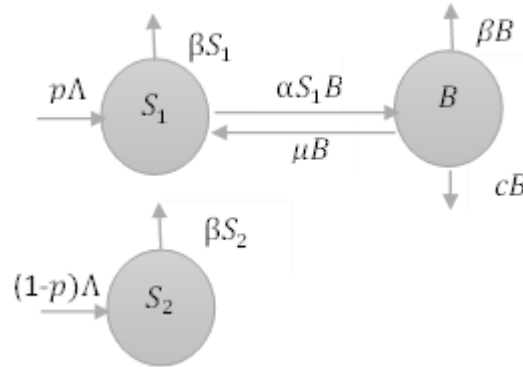
Berdasarkan uraian pada paragraf sebelumnya, penelitian ini bertujuan untuk membangun model matematika yang melibatkan intervensi sekolah dan resiliensi siswa dalam dinamika penyebaran perilaku *bullying*. Analisis dinamik yang dilakukan pada penelitian ini mencakup penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, dan menganalisis sifat kestabilan titik kesetimbangan. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4 untuk memverifikasi hasil analitik.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini diawali dengan membangun model matematika dinamika perilaku *bullying* dengan mempertimbangkan intervensi sekolah dan resiliensi siswa. Model diformulasikan dalam bentuk sistem persamaan diferensial yang merepresentasikan transisi antar kelompok siswa, yaitu rentan, resilien, dan pelaku. Selanjutnya, dilakukan analisis dinamik yang meliputi penentuan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar (R_0), serta kestabilan titik kesetimbangan. Untuk memverifikasi hasil analisis, dilakukan simulasi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat berbantuan MATLAB.

Model matematika pada penelitian ini merupakan hasil modifikasi dari model (Ashi, 2021) dengan menambahkan variable siswa yang resilien artinya siswa tidak rentan menjadi pelaku dan parameter intervensi dari pihak sekolah kepada pelaku *bullying*. Variabel yang digunakan pada model ini yaitu variabel siswa rentan menjadi pelaku (S_1), siswa resilien (S_2), dan pelaku (B). Rekrutmen siswa baru (Λ) dinyatakan dalam proporsi p . Sebagian siswa baru resilien dengan laju $(1 - p)$. Variable siswa resilien (S_2) ditambahkan untuk merepresentasikan heterogenitas dalam populasi siswa karena tidak semua siswa memiliki tingkat kerentanan yang sama terhadap pengaruh *bullying*. Faktor internal maupun eksternal seperti stabilitas emosi, kontrol diri, empati, dukungan keluarga, serta lingkungan sekolah yang positif menyebabkan sebagian siswa lebih tahan terhadap pengaruh negatif sehingga tetap netral walaupun berada dalam lingkungan dengan kasus *bullying* (Sapouna dan Wolke, 2013). Intervensi dari pihak sekolah berupa konseling atau pembinaan memungkinkan pelaku kembali menjadi siswa rentan dengan laju (μ), sedangkan intervensi berupa pemberian sanksi akademik dalam hal ini siswa dikeluarkan dari sekolah dapat mengurangi jumlah pelaku

dengan laju (c). Diagram kompartemen model penyebaran perilaku bullying hasil modifikasi disajikan pada Gambar 1 berikut



Gambar 1. Diagram kompartemen model

Berdasarkan Gambar 1 diperoleh model penyebaran perilaku bullying S_1S_2B sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= p\Lambda - \beta S_1 - \alpha S_1 B + \mu B, \\ \frac{dS_2}{dt} &= (1-p)\Lambda - \beta S_2, \\ \frac{dB}{dt} &= \alpha S_1 B - (\mu + c + \beta)B, \end{aligned} \quad (1)$$

dengan parameter-parameter $\Lambda, p, \beta, \alpha, \mu, c$ yang menyatakan laju bertambahnya siswa baru, proporsi siswa baru yang rentan menjadi pelaku, laju keluarnya siswa dari sekolah karena lulus, laju penularan perilaku *bullying*, intervensi sekolah kepada pelaku *bullying*, laju pelaku dikeluarkan dari sekolah.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Titik Keseimbangan

Untuk memperoleh titik keseimbangan, persamaan pada sistem (1) harus sama dengan nol. Pada penelitian ini diperoleh dua titik keseimbangan, yaitu titik keseimbangan bebas *bullying* E_0 dan titik keseimbangan dengan *bullying* E_1 . Titik keseimbangan E_0 diperoleh ketika $B = 0$, sehingga diperoleh titik keseimbangan bebas *bullying* dari sistem (1) sebagai berikut

$$E_0(S_1, S_2, B) = \left(\frac{p\Lambda}{\beta}, \frac{(1-p)\Lambda}{\beta}, 0 \right)$$

Selanjutnya, penentuan angka reproduksi dasar (R_0) dilakukan dengan menggunakan metode matriks generasi selanjutnya. Angka reproduksi dasar (R_0) sistem (1) sebagai berikut

$$R_0 = \frac{\alpha p \Lambda}{\beta(\mu + c + \beta)}$$

Selanjutnya, ditentukan titik keseimbangan dengan bullying E_1 artinya ada perilaku *bullying* dalam sistem. Titik keseimbangan dengan bullying yaitu $E_1 = (S_1^*, S_2^*, B^*)$ dengan

$$S_1^* = \frac{\mu + c + \beta}{\alpha}$$

$$S_2^* = \frac{(1-p)\Lambda}{\beta}$$

$$B^* = \frac{p\Lambda}{c+\beta} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)$$

Kestabilan Titik Keseimbangan

Kestabilan lokal titik keseimbangan sistem (1) ditentukan dengan menggunakan proses linearisasi. Matriks Jacobi untuk sistem (1) sebagai berikut

$$J(S_1, S_2, B) = \begin{pmatrix} j_{11} & 0 & j_{13} \\ 0 & -\beta & 0 \\ j_{31} & 0 & j_{33} \end{pmatrix} \quad (2)$$

dengan $j_{11} = -\beta - \alpha B$, $j_{13} = -\alpha S_1 + \mu$, $j_{31} = \alpha B$, dan $j_{33} = \alpha S_1 - (\mu + c + \beta)$

Teorema 1. Titik keseimbangan bebas *bullying* $E_0 = (S_1^0, S_2^0, B^0)$ stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$

Bukti

Substitusi titik keseimbangan $E_0 = (S_1^0, S_2^0, B^0)$ ke dalam matriks Jacobi (2) diperoleh

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\beta & 0 & a_{13} \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

dengan $a_{13} = \frac{-\alpha p \Lambda}{\beta} + \mu$ dan $a_{33} = \frac{\alpha p \Lambda}{\beta} - (\mu + c + \beta)$

Persamaan karakteristik matriks Jacobi $J(E_0)$ adalah

$$(-\beta - \lambda)^2 \left(\frac{\alpha p \Lambda}{\beta} - (\mu + c + \beta) - \lambda \right) = 0 \quad (2)$$

Dari persamaan karakteristik (2) diperoleh nilai eigen $\lambda_{1,2} = -\beta$ dan $\lambda_3 = \frac{\alpha p \Lambda}{\beta} - (\mu + c + \beta) = (\mu + c + \beta)(R_0 - 1)$. Diketahui bahwa nilai eigen $\lambda_{1,2}$ bernilai negatif karena $\beta > 0$. Oleh karena $\lambda_{1,2}$ negatif, kestabilan titik keseimbangan bebas *bullying* $E_0 = (S_1^0, S_2^0, B^0)$ ditentukan oleh nilai λ_3 . Jika $R_0 > 1$ maka λ_3 bernilai positif, sebaliknya λ_3 bernilai negatif jika $R_0 < 1$. Oleh karena λ_1, λ_2 , dan λ_3 negatif, maka terbukti bahwa titik keseimbangan bebas *bullying* $E_0 = (S_1^0, S_2^0, B^0)$ bersifat stabil asimtotik lokal.

Teorema 2. Titik keseimbangan dengan *bullying* $E_1 = (S_1^*, S_2^*, B^*)$ stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$

Bukti

Matriks Jacobi pada titik keseimbangan $E_1 = (S_1^*, S_2^*, B^*)$ dilakukan dengan mensubstitusi titik keseimbangan (S_1^*, S_2^*, B^*) ke dalam matriks Jacobi (2), sehingga diperoleh

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -\beta - \alpha B^* & 0 & -(c + \beta) \\ 0 & -\beta & 0 \\ \alpha B^* & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa matriks $J(E_1)$ merupakan matriks segitiga atas, sehingga persamaan karakteristik matriks $J(E_1)$ adalah hasil kali dari entri diagonal utama. Persamaan karakteristik $\det(J(E_1) - \lambda I)$ adalah

$$-(\beta - \lambda)(\lambda^2 + (\beta + \alpha B^*)\lambda + (c + \beta)\alpha B^*) = 0 \quad (3)$$

Berdasarkan persamaan karakteristik (3) diperoleh $\lambda_1 = -\beta$, sehingga kestabilan titik keseimbangan dengan *bullying* bergantung pada tanda λ_2 dan λ_3 . Selanjutnya, digunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk menganalisis tanda dari nilai eigen λ_2 dan λ_3 .

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (\beta + \alpha B^*)\lambda + (c + \beta)\alpha B^* = 0$$

Dengan $a_1 = \beta + \alpha B^*$ dan $a_0 = (c + \beta)\alpha B^*$. Kriteria kestabilan untuk polinomial berderajat 2 yaitu $a_1 > 0$ dan $a_0 > 0$. Selanjutnya cek apakah kriteria tersebut terpenuhi.

$$\begin{aligned} a_1 &> 0 \\ \beta + \alpha B^* &> 0 \end{aligned}$$

$$\beta + \alpha \frac{p\Lambda}{c+\beta} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) > 0 \text{ sehingga agar } a_1 > 0 \text{ haruslah } R_0 > 1$$

Selanjutnya $a_0 > 0$

$$(c + \beta)\alpha B^* > 0$$

$$(c + \beta)\alpha \frac{p\Lambda}{c+\beta} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) > 0 \text{ sehingga } R_0 > 1 \text{ agar } a_0 > 0$$

Berdasarkan uraian sebelumnya, diketahui bahwa titik kesetimbangan dengan *bullying* stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$

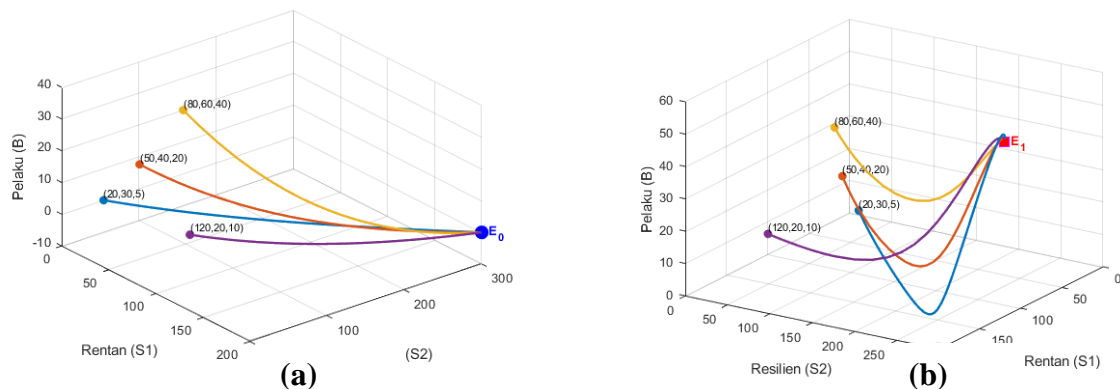
Simulasi Numerik

. Nilai parameter yang digunakan disajikan pada Tabel 1 berikut

Tabel 1. Nilai Parameter

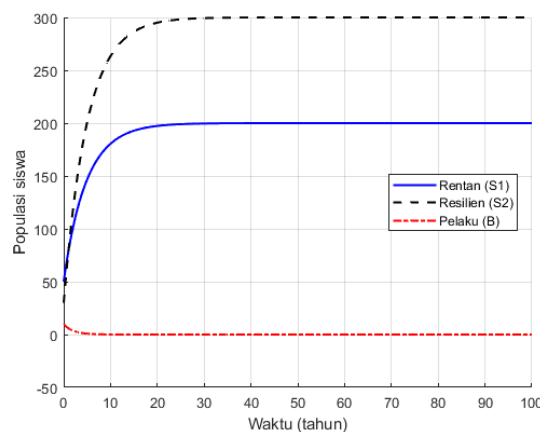
Parameter	Deskripsi	Nilai
p	Proporsi siswa baru yang rentan menjadi pelaku	0.4
Λ	Laju bertambahnya siswa baru	100
β	Laju siswa yang lulus	0.2
c	Laju pelaku yang dikeluarkan dari sekolah	0.1
μ	Laju intervensi sekolah terhadap pelaku	0.3

Simulasi numerik dilakukan dalam dua kondisi yaitu ketika $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$. Jika digunakan nilai $\alpha = 0.001$ maka diperoleh $R_0 = 0.33 < 1$ dan titik kesetimbangan bebas *bullying* $E_0 = (S_1^0, S_2^0, B^0) = (200, 300, 0)$. Jika nilai $\alpha = 0.005$, diperoleh $R_0 = 1.67 > 1$ dan titik kesetimbangan $E_1 = (S_1^*, S_2^*, B^*) = (120, 300, 54)$. Potret fase disajikan pada gambar 1 berikut. Pada gambar 1(a) dapat dilihat bahwa ketika $R_0 < 1$ dengan menggunakan nilai awal yang berbeda, solusi sistem menuju ke titik kesetimbangan E_0 , sebaliknya jika $R_0 > 1$ maka terdapat dua titik kesetimbangan yaitu E_0 dan E_1 dimana solusi sistem menuju ke titik kesetimbangan E_1 yang disajikan pada gambar 1(b).



Gambar 1. Potret fase dengan nilai awal yang berbeda (a) $R_0 = 0.33$ dan (b) $R_0 = 1.67$

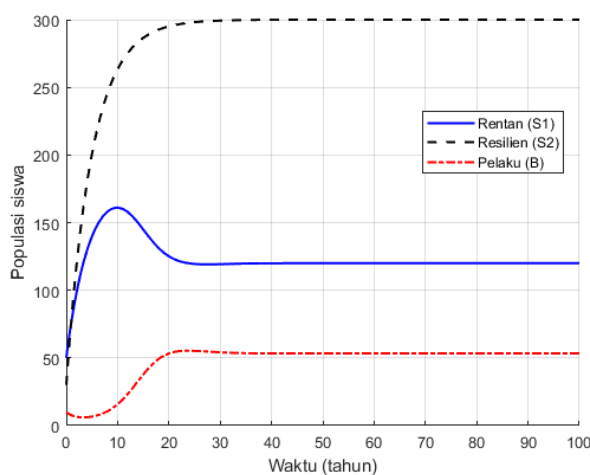
Selanjutnya simulasi grafik solusi sistem (1) dengan menggunakan nilai awal $S_1 = 50, S_2 = 30, B = 10$. Gambar 2 berikut menunjukkan dinamika siswa rentan (S_1), resilien (S_2), dan pelaku (B) saat $R_0 < 1$.



Gambar 2. Grafik solusi untuk $R_0 < 1$

Pada Grafik 2 dapat dilihat bahwa dengan nilai awal yang digunakan, solusi sistem menuju ke titik kesetimbangan E_0 . Hal ini menunjukkan bahwa titik kesetimbangan E_0 stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$. Grafik solusi pelaku *bullying* (B) menurun menuju nol yang artinya bahwa perilaku *bullying* tidak dapat bertahan dalam populasi karena rata-rata pelaku tidak dapat menularkan perilaku tersebut ke lebih dari satu individu yang lain.

Selanjutnya gambar 3 menunjukkan bahwa solusi sistem (1) menuju ke titik kesetimbangan dengan bullying $E_1 = (S_1^*, S_2^*, B^*) = (120, 300, 54)$ dengan nilai awal $S_1 = 50, S_2 = 30, B = 10$. Hal ini menunjukkan bahwa jika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan E_1 bersifat stabil asimtotik lokal.



Gambar 3. Grafik solusi untuk $R_0 > 1$

Pada gambar 3 dapat dilihat bahwa grafik solusi pelaku *bullying* (B) naik kemudian stabil. Hal ini mengindikasikan bahwa rata-rata setiap pelaku *bullying* mampu menularkan perilaku *bullying* ke lebih dari satu pelaku baru, artinya *bullying* akan tetap ada dalam sistem.

PENUTUP

Model penyebaran perilaku *bullying* pada siswa telah dikonstruksi dengan menambahkan intervensi berupa konseling atau pembinaan kepada pelaku dan siswa yang resilien. Berdasarkan hasil analisis dan simulasi numerik diketahui bahwa titik kesetimbangan bebas *bullying* (E_0) stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan titik kesetimbangan dengan *bullying* (E_1) stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$. Hasil simulasi numerik sesuai dengan hasil analisis. Penelitian selanjutnya disarankan untuk menambahkan faktor lain yang berpengaruh terhadap penularan perilaku *bullying*.

REFERENSI

- Adenji, A., Addai, E., Michael, S., Maiesela, K., Asamoah, J. K.K., & Oshinubi, K. (2025). Analysis of School Bullying Menace Incorporating family Education: A Mathematical Approach. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*. 1-12.
- Aliyev, R. & Gengec, H. (2019) The Effects of Resilience and Cyberbullying on Self-Esteem. *Journal of Education*. 199(3),155-165.
- Al-Rahmi, W. M., Yahaya, N., Alamri, M.M., Aljarboa, N. A., Kamin, Y., & Moafa, F. A. A. (2019). Model of Factors Affecting Cyber Bullying Behaviors Among University Student. *IEEE Access*. 7, 2978-2985.
- Ashi, H.A. (2021). Stability Analysis of a Simple Mathematical Model for School Bullying. *AIMS Mathematics*. 7(4), 4936-4945.
- Asya, S. Z. R., damang, D., Side, S., Yusuf, M.R., & Pratama, M. I. (2024). Solusi Masalah Bullying Menggunakan Pemodelan Matematika dengan Bimbingan dan Konseling pada Pelajar Madrasah di Kabupaten Gowa. *Proximal: Jurnal Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika*. 7(2), 604-615.
- Lu, L., Fei, L., ye, Y., Liao, M., Chang, Y., Chen, Y., Zou, Y., Li, X., & Zhang, R. (2022). Psychological Resilience May Be Related to Students' Responses to Victims of School Bullying: A Cross-Sectional Study of Chinese Grade 3–5 Primary School Students. *MDPI*. 19(23), 16121.
- Rosmi, F., Kartikasari, P., Yuningsih, S., & Anggraeni, L. (2023). Edukasi Intensif Sekolah Ramah Anak Mencegah Perilaku Bullying Siswa Kelas Rendah SDN Pamulang Indah. *Jurnal Pendidikan Transformatif (Jupetra)*, 2(6), 84-101.
- Ross, S. W., Horner, R. H., & Higbee, T. (2013). Bully Prevention in Positive behavior Support. *Journal of Applied Behavior Analysis*. 42(4), 747-759.
- Sari, D. P., Krisphianti, Y. D., & hanggara, G. S. (2025). Bullying dan Kesehatan Mental: studi Literatur Tentang Dampak Di Berbagai Tingkat Sekolah. *Prosiding Konseling Kearifan Nusantara (KKN)*. 4, 320-326.
- Sapouna, M. & Wolke, D. (2013). Resilience to bullying victimization: The role of individual, family and peer characteristics. *Child Abuse & Neglect*. 37(11), 997-1006.
- Susanti, E., Syabrina, L., Pitaloka, D. P., & Kemuning, S. (2023). Bully dan Hate Speech pada Mahasiswa Tadris Ilmu Pengetahuan Sosial Universitas Islam Negeri Sumatera Utara Medan. *Jurnal Pendidikan Tambusai*, 7(3), 30712-30720.