AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Vol. 11, No. 2 Desember 2020
e-ISSN 2579-7646

Modifikasi metode Schroder tanpa turunan kedua dengan orde konvergensi empat

[1]Rahmadhani Yulmi Putri, [2]Wartono
[1,2] Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
email : wartono@uin-suska.ac.id

Abstrak

Metode Schroder merupakan metode iterasi berode dua yang digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan nonlinear. Artikel ini membahas modifikasi metode Schroder untuk meningkatkan orde konvergensi. Metode Schroder dengan satu parameter real dikembangkan menggunakan ekspansi deret Taylor orde dua. Metode Schroder yang dimodifikasi masih memuat turunan kedua. Selanjutnya, turunan kedua tersebut direduksi menggunakan kesamaan dua metode iterasi. Berdasarkan hasil kajian, metode iterasi baru mempunyai orde konvergensi empat yang melibatkan tiga evaluasi fungsi dengan indeks efisiensi sebesar $\mathbf{4^{1/3} \approx 1,587401}$ untuk β = ½. *Simulasi numerik diberikan untuk menguji performa metode iterasi baru yang meliputi jumlah iterasi, orde konvergensi secara komputasi (COC), galat mutlak dan galat relatif. Nilai-nilai performa dari metode iterasi baru dibandingkan dengan metode Newton, metode Schroder, metode Chebyshev dan metode Halley. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa performa metode iterasi baru lebih baik dibandingkan dengan metode iterasi lainnya.*

Kata kunci: *evaluasi fungsi; indeks efisiensi; metode Schroder; orde konvergensi; persamaan nonlinear*

Abstract

Schrode'sr method is a second-order iterative method used to find the roots of nonlinear equation. This article discusses a modification of Schroder's method to improve the order of convergence. The Schroder's method with one real parameter was developed using second order Taylor expansion. The modified Schroder's method still involved second derivative. Therefore, the second derivative was reduced using an equality of two iterative methods. Based on the results of the study, the new iterative method has a fourth-order convergence involving three evaluation functions with an efficiency index of $4^{1/3} \approx 1{,}587401$ *for* β = ½. *Numerical simulations are given to test the new iterative method including the number of iterations, computational order of convergence (COC), absolute errors and relative errors. The value of the performances of the new iterative method are compared to Newton's method, Schroder's method, Chebyhev's method and Halley's method. Based on the numerical simulation shows that the performace of the new iterative method is better than others compared iterative method.*

Keywords: *functional evaluation; efficiency index; Schroder's methods; order of convergence; nonlinear equations*

A. Pendahuluan

Metode iterasi digunakan untuk menentukan akar-akar dari persamaan nonlinear

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

Di mana $f: I \subset \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ yang merupakan fungsi skalar di selang terbuka I. Salah satu metode iterasi klasik yang sering digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan nonlinear pada Persamaan (1) yaitu metode Newton dalam bentuk Persamaan (2).

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2}$$

Metode Newton merupakan metode iterasi satu titik dengan orde konvergensi dua dan melibatkan dua evaluasi fungsi ada setiap iterasinya, sehingga indeks efisiensinya sebesar $2^{1/2} \approx 1{,}414214$ (Traub, 1964:5).

Selain Metode Newton, metode klasik satu titik dengan orde konvergensi kuadratik adalah metode Schroder yang dirumuskan dengan Persamaan (3).

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)} \tag{3}$$

Metode Schroder melibatkan tiga evaluasi fungsinya sehingga indeks efisiensinya sebesar $2^{1/3} \approx 1{,}259921$ (Petkovic dan Petkovic, 2008).

Beberapa peneliti telah mengembangkan metode Schroder dengan menggunakan berbagai teknik modifikasi. Kanwar dkk (2010), memodifikasi metode Schroder menggunakan deret kuasa dengan orde konvergensi tiga. Thukral (2016) mengkontruksi metode iterasi dua titik menggunakan metode Schroder dengan orde konvergensi empat. Thukral (2017) memodifikasi metode Schroder dengan melibatkan 5 parameter real. Behl dkk. (2019) mengembangkan metode Schroder menjadi metode iterasi dua titik dan mereduksi turunan keduanya menggunakan ekspansi Taylor orde dua.

Pada artikel ini, penulis memodifikasi metode Schroder yang diberikan pada Persamaan (2) dengan menggunakan ekspansi deret Taylor orde dua (Kanwar & Tomar, 2007; Baghat, 2012; Behl & Kanwar, 2013; Rahmawati dkk., 2018; Wartono dkk., 2019). Selanjutnya, untuk menghilangkan turunan kedua pada metode iterasi tersebut, penulis mengkontruksi turunan kedua menggunakan kesamaan dua metode iterasi (Alamsyah dan Wartono, 2017; Wartono dkk., 2018).

Pada bagian akhir, penulis melakukan simulasi numerik dengan mengimplementasikan metode iterasi yang diusulkan terhadap beberapa fungsi real untuk menentukan jumlah iterasi, orde konvergensi yang dihitung secara komputasi atau *computational order of convergence* (COC), galat mutlak, dan galat relatif. Selanjutnya, nilai galat mutlak dan galat relatif dari metode tersebut dibandingan dengan metode Newton, Schroder, Chebyshev, dan Halley (Traub, 1964:5; Scavo dan Thoo, 1995; Amat dkk., 2008; Gander, 1985).

B. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian studi literatur atau kepustakaan (*library research*) yang dilakukan melalui tiga tahapan sebagai berikut. Pada tahap pertama, sebuah metode iterasi dikonstruksi dari varian metode Schorder dengan parameter real β yang di modifikasi menggunakan ekspansi deret Taylor orde satu. Selanjutnya turunan keduanya direduksi menggunakan ekspansi deret Taylor orde dua. Tahap kedua menentukan orde konvergensi dari metode iterasi menggunakan ekspansi deret Taylor, dan sekaligus menentukan nilai parameter β untuk menghasilkan orde konvergensi yang optimal. Tahap terakhir mengimplementasikan metode iterasi pada enam fungsi real dengan tujuan untuk menguji performasi metode iterasi menggunakan perangkat lunak MAPLE 13. Ukuran-ukuran perormasi yang diuji yaitu: jumlah iterasi, orde konvergensi yang dihitung secara komputasi (COC), galat mutlak dan galat relatif. Kemudian, ukuran-ukuran performasi dari metode iterasi tersebut dibandingkan dengan metode Newton, metode Schroder, metode Chebyshev, dan metode Halley.

C. Hasil dan Pembahasan

Pada sub bagian ini, kami akan menunjukkan hasil dan pembahasan dari modifikasi metode Schroder, analisis konvergensi dan simulasi numerik.

1. Modifikasi Metode Schroder

Untuk mengkonstruksi metode iterasi, pertimbangkan kembali bentuk umum metode Schroder pada Persamaan (3) dalam bentuk persamaan seperti pada Persamaan (4).

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{1}{1-\beta L_f}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{4}$$

dimana

$$L_f(x_n) = \frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}$$

Kemudian untuk mendapatkan bentuk baru dari metode Schroder di Persamaan (4), maka bentuk $\frac{1}{1-\beta L_f}$ diekspansi menggunakan deret Taylor orde satu, sehingga Persamaan (4) dapat ditulis kembali menjadi Persamaan (5) berikut ini.

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \beta L_f\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5}$$

Selanjutnya untuk meningkatkan orde konvergensi, Persamaan (5) akan dilakukan substitusi ke deret Taylor. Oleh karena itu, pertimbangkan kembali ekspansi deret Taylor orde dua di sekitar x_n, sehingga diperoleh bentuk Persamaan (6).

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2 \tag{6}$$

Misalkan x_{n+1} adalah akar pendekatan pada iterasi ke-$(n+1)$ yang cukup dekat dengan akar eksak α maka $f(x_{n+1}) \approx 0$, sehingga Persamaan (6) dapat ditulis dalam bentuk Persamaan (7).

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{f(x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2}{f'(x_n)}\right) \tag{7}$$

Gunakan Persamaan (6) untuk mengganti bentuk $x_{n+1} - x_n$ pada ruas kanan Persamaan (7), sehingga Persamaan (7) menjadi Persamaan (8).

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{f''(x_n)f(x_n)\left(1 + \beta\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}\right)^2}{2f'(x_n)^2}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{8}$$

Persamaan (8) dapat diuraikan dalam bentuk Persamaan (9).

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{f''(x_n)f(x_n)}{2f'(x_n)^2} + 2\beta\frac{f''(x_n)^2 f(x_n)^2}{2f'(x_n)^4} + \beta^2\frac{f''(x_n)^3 f(x_n)^3}{2f'(x_n)^6}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{9}$$

Persamaan (11) masih memuat turunan kedua. Selanjutnya, turunan kedua diperoleh dengan menggunakan kesamaan dua metode iterasi. Pertimbangkan kembali dua metode berorde konvergensi tiga, yaitu metode Potra-Ptak (Potra & Ptak, 1984) dan metode iterasi Chun-Kim (Chun dan Kim, 2010), masing-masing diberikan oleh Persamaan (10) dan Persamaan (11).

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)} \tag{10}$$

dan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)f''(x_n) + 2f(x_n)f'^2(x_n)}{2f'^3(x_n)} \tag{11}$$

Dengan y_n adalah metode Newton yang diberikan pada Persamaan (1).

Kesamaan dari Persamaan (10) dan Persamaan (11) memberikan bentuk turunan kedua yang diberikan oleh Persamaan (12).

$$f''(x_n) \approx \frac{2f'(x_n)^2 f(y_n)}{f^2(x_n)} \tag{12}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan Persamaan (12) ke Persamaan (11), dan menyederhankannya maka diperoleh secara lengkap skema metode iterasi dua titik.

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{13.a}$$

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n)} + 4\beta\frac{f(y_n)^2}{f(x_n)^2} + 4\beta^2\frac{f(y_n)^3}{f(x_n)^3}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{13.b}$$

Persamaan (13) merupakan modifikasi metode Schroder menggunakan deret Taylor orde dua yang melibatkan tiga evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$ dan $f(y_n)$.

2. Analisis Konvergensi

Berikut ini akan ditentukan orde konvergensi dari Persamaan (13). Untuk menentukan orde konvergensi akan dijelaskan pada Teorema (1).

Teorema 1. Misalkan $x \in I$ akar sederhana dari fungsi $f : I \subset \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ yang terdiferensial pada interval buka I. Jika x_0 cukup dekat ke akar x, maka orde konvergensi Persamaaan (13) adalah orde empat untuk $\beta = 1/2$ yang memenuhi persamaan galat yang diekspresikan dalam Persamaan (14).

$$e_{n+1} = (4c_2^2 - c_2c_3)e_n^4 + O(e_n^5) \tag{14}$$

Bukti. Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan $f'(x) \neq 0, x_n = \alpha + e_n$ dengan menggunakan rumus ekspansi Deret Taylor untuk mengaproksimasikan fungsi f disekitar α untuk x_n, diperoleh Persamaan (15).

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + c_5e_n^5 + O(e_n^6)\right) \tag{15}$$

dengan:

$$c_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)},\ j = 1,2,3,\dots .$$

Sedangkan untuk $f'(x_n)$ diberikan oleh Persamaan (16).

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\left(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + 5c_5e_n^4 + O(e_n^5)\right) \tag{16}$$

Jika Persamaan (15) dibagi dengan Persamaan (16) yang menggunakan ekspansi Taylor sehingga diperoleh Persamaan (17).

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + (-2c_2^2 + 2c_3)e_n^3 + (-7c_2c_3 + 3c_4 + 4c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5) \tag{17}$$

Oleh karena,

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ dan } x_n = e_n + \alpha,$$

Maka didapatkan Persamaan (18).

$$y_n = \alpha - c_2 e_n^2 + (-2c_2^2 + 2c_3)e_n^3 + (-7c_2c_3 + 3c_4 + 4c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (18)$$

Berdasarkan ekspansi deret Taylor di sekitar α, $f(\alpha) = 0$, maka didapatkan Persamaan (19).

$$f(y_n) = f'(\alpha)(c_2 e_n^2 + (-2c_2^2 + 2c_3)e_n^3 + (-7c_2c_3 + 3c_4 + 4c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5)) \qquad (19)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan Persamaan (15) dan Persamaan (19), didapatkan Persamaan (20).

$$\frac{f(y_n)}{f(x_n)} = c_2 e_n^2 + (-3c_2^2 + 8c_2^3 + -10c_2c_3 + 2c_3 + 3c_4)\, e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (20)$$

Sedangkan kuadrat dari Persamaan (15) dan Persamaan (19) masing-masing diberikan oleh Persamaan (21) dan Persamaan (22).

$$f(x_n)^2 = f'(\alpha)^2\left(e_n^2 + 2c_2 e_n^3 + (c_2^2 + 2c_3)e_n^4 + O(e_n^5)\right) \qquad (21)$$

$$f(y_n)^2 = f'(\alpha)^2\left(e_n^3 + (3c_2 + 3c_2^2 + 3c_3)e_n^4 + O(e_n^5)\right) \qquad (22)$$

Kemudian Persamaan (15) dan (19) dijadikan bentuk kubik sehingga diperoleh Persamaaan (23) dan (24).

$$f(x_n)^3 = f'(\alpha)^3\left(e_n^3 + 3c_2 e_n^4 + (3c_2^2 + 2c_3)e_n^5 + O(e_n^6)\right) \qquad (23)$$

$$f(y_n)^3 = f'(\alpha)^3\left((c_2^3 + 6c_2^2c_3 - 6c_2^4)e_n^6 + O(e_n^7)\right) \qquad (24)$$

Selanjutnya, dengan merujuk pada Persamaan (21), (22), (23) dan (24), maka diperoleh Persamaan (25) dan (26).

$$\frac{f(y_n)^2}{f(x_n)^2} = c_2^2 e_n^2 + (-6c_2^3 + 4c_2c_3)e_n^3 + (c_2^2(3c_2^2 - c_3) - 4c_2^2(-2c_2^2 + 2c_3) + 2c_2(5c_2^3 - 7c_3 + 3c_4))\, e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (25)$$

$$\frac{f(y_n)^3}{f(x_n)^3} = c_2^3 e_n^3 + (-3c_2^4 + 3c_2^2(-2c_2^2 + 2c_3))e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (26)$$

Substitusikan Persamaan (17), (20), (25), dan (26) ke Persamaan (13), dan dengan $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ dan $x_n = e_n + \alpha$, sehingga diperoleh Persamaan (27).

$$e_{n+1} = 2(1 - 2\beta)c_2^2 e_n^3 + ((7 - 16\beta)c_2c_3 + (-9 + 28\beta c_2^3 - 4\beta^2)c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (27)$$

Berdasarkan Persamaan (27), orde konvergensi metode iterasi (13) dapat ditingkatkan dengan mengambil $1-2\beta=0$. Oleh karena itu, dengan mensubstitusikan $\beta=1/2$ ke Persamaan (27) maka diperoleh galat dari modifikasi metode Schroder yang diberikan oleh Persamaan (28).

$$e_{n+1} = (4c_2^3 - c_2c_3)\, e_n^4 + O(e_n^5) \tag{28}$$

Persamaan (28) merupakan orde konvergensi dari modifikasi varian metode Schroder tanpa turunan kedua sebesar empat untuk $\beta=1/2$. Oleh karena metode iterasi (13) melibatkan tiga evaluasi fungsi pada setiap iterasinya, maka menurut Kung & Traub (1974), indeks efisiensi metode iterasi (13) sebesar $4^{1/3} \approx 1{,}587401$.

3. Simulasi Numerik

Untuk menggambarkan performa metode iterasi Persamaan (13), maka dilakukan simulasi numerik dengan membandingkan jumlah iterasi, COC, galat mutlak $|x_n-\alpha|$, dan galat relatif $|x_{n+1}-x_n|$ antara metode iterasi tersebut (MMS) dengan Metode Newton (MN), Metode Schroder (SC), Metode Chebyshev (MC) dan Metode Halley (MH). Uji simulasi numerik dilakukan menggunakan perangkat lunak Maple 13 dengan 850 digit titik kambang artimetik dan tebakan awal x_0 sedekat mungkin dengan akar persamaan α. Perhitungan komputasi akan berhenti ketika memenuhi kriteria Persamaan (31).

$$|x_{n+1}-x_n| < \varepsilon, \tag{31}$$

Dengan $\varepsilon = 10^{-20}$. Sedangkan untuk menghitung COC digunakan rumusan yang diperkenal oleh Weerakoon dan Fernando (2000) dalam bentuk Persamaan (32).

$$\rho = \frac{\ln|(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)|}{\ln|(x_{n-1}-\alpha)/(x_{n-2}-\alpha)|} \tag{32}$$

Adapun fungsi-fungsi yang akan digunakan adalah sebagai berikut:

$f_1(x) = \sqrt{x} - x,\ \alpha = 1{,}000000000000000,$

$f_2(x) = e^x - 4x^2,\ \alpha = 4{,}306584728220699,$

$f_3(x) = (x-1)^3 - 1,\ \alpha = 2{,}000000000000000,$

$f_4(x) = sin^2(x) + x^2 + 1\ ,\ \alpha = 1{,}404491648215341,$

$f_5(x) = x^3 + 4x^2 - 10,\ \alpha = 1{,}365230012414097,$

$f_6(x) = e^{x^2+x+2}cos(x+1) + x^3 + 1,\ \alpha = -1{,}000000000000000.$

Tabel 1 memperlihatkan perbandingan jumlah iterasi dan COC dari berbagai metode iterasi dengan $\varepsilon = 10^{-20}$.

Tabel 1. Perbandingan Jumlah Iterasi dan COC untuk $\varepsilon = 10^{-20}$

$f(x)$	x_0	Jumlah Iterasi					COC				
		MN	SC	MC	MH	P(4.15)	MN	SC	MC	MH	MMS
$f_1(x)$	0,5	5	6	4	4	3	1,999998	2,000000	2,999999	3,000062	3,949737
	1,5	6	5	3	3	3	2,000000	2,000000	3,000319	2,998099	3,999779
$f_2(x)$	4,0	6	6	4	4	4	2,000000	2,000000	3,000057	3,000000	3,999997
	4,5	5	5	3	3	3	1,999999	2,000000	2,998897	2,999815	3,999711
$f_3(x)$	2,5	7	6	4	4	3	1,999999	2,000000	2,999923	2,999997	3,981150
	3,0	7	7	5	4	4	2,000000	2,000000	2,999999	2,999653	3,999605
$f_4(x)$	1.2	5	5	4	3	3	1,999999	2,000000	3,000000	3,000640	3,997251
	2,0	6	6	4	4	3	2,000000	2,000000	2,999953	2,999995	3,988222
$f_5(x)$	1,0	5	5	4	3	3	1,999999	2,000000	3,000002	3,001184	3,995391
	2,0	6	6	4	4	3	2,000000	2,000000	2,999997	2,999999	3,996275
$f_6(x)$	–1,5	5	5	5	4	3	2,000000	2,000000	3,000000	3,000001	4,000077
	0,0	5	6	4	4	3	2,000000	1,999975	3,000000	3,000277	4,000167

Berdasarkan Tabel 1 dapat dilihat bahwa metode iterasi (13) membutuhkan lebih sedikit iterasi untuk menghampiri akar-akar persamaan nonlinear. Selain itu, Tabel 1 juga menjelaskan bahwa metode iterasi (13) memiliki orde konvergensi empat.

Selain menggunakan jumlah iterasi dan COC, performa suatu metode iterasi dapat dilihat dari nilai akurasi dan ketelitiannya, yang masing-masing di representasikan oleh galat mutlak dan galat relatif. Tabel 2 dan 3 memperlihatkan perbandingan galat mutlak ($|x_n - \alpha|$), dan galat relatif ($|x_n - x_{n+1}|$) dari berbagai metode iterasi berdasarkan jumlah total evaluasi fungsi atau*Total number of functional evaluation* atau TNFE) sebesar 12.

Tabel 2. Perbandingan $|x_n - \alpha|$dengan TNFE=12

$f(x)$	x_0	MN	SC	MC	MH	P(4.15)
$f_1(x)$	0,5	3,0985(e–43)	9,3303(e-09)	2,5772(e–12)	5,9333(e–34)	9,9248(e-84)
	1,5	2,1299(e–66)	2,7114(e-18)	1,0470(e–62)	4,4256(e–66)	2,0703(e-208)
$f_2(x)$	4,0	1,2647(e–34)	6,4250(e-10)	6,1268(e–58)	5,3111(e–55)	1,2466(e-74)
	4,5	8,0333(e–54)	1,9598(e-13)	4,4870(e–81)	1,3204(e–77)	2,5230(e-174)
$f_3(x)$	2,5	6,0311(e12)	7,4166(e-07)	1,5945(e–30)	6,6605(e–41)	9,7249(e-83)
	3,0	1,5483(e–16)	1,5662(e-03)	7,9903(e–17)	2,1303(e–24)	4,2511(e-43)
$f_4(x)$	1.2	8,4046(e-48)	1,1166(e-12)	8,5934(e-51)	6,2548(e-69)	9,5831(e-128)
	2,0	9,1131(e-33)	2,2280(e-10)	1,5763(e-36)	3,4723(e-43)	1,0647(e-95)
$f_5(x)$	1,0	2,4116(e–44)	4,9705(e-23)	1,8143(e–42)	1,3534(e–61)	2,5778(e-114)
	2,0	7,4858(e–39)	1,5802(e-09)	3,7453(e–42)	2,8219(e–53)	4,5249(e-119)
$f_6(x)$	–1,5	3,2101(e–66)	9,1130(e-09)	1,2345(e–51)	2,5436(e–44)	7,3210(e-187)
	0,0	3,2102(e–66)	9,1130(e-09)	1,8780(e–20)	1,0653(e–26)	1,9625(e-156)

Tabel 3. Nilai $|x_{n+1} - x_n|$ dengan TNFE=12

$f(x)$	x_0	MN	SC	MC	MH	P(4.15)
$f_1(x)$	0,5	1,1133(e–21)	1,9313(e-04)	2,1759(e–04)	1,4681(e–11)	3,2076(e-21)
	1,5	2,9188(e–33)	3,2933(e-09)	3,4727(e–21)	2,8685(e–22)	2,1677(e-52)
$f_2(x)$	4,0	1,2323(e–17)	2,7774(e-05)	1,2533(e–19)	1,1156(e–18)	2,7919(e-19)
	4,5	3,1057(e–27)	4,8508(e-07)	2,4339(e–27)	3,2561(e–26)	3,3303(e-44)
$f_3(x)$	2,5	2,4558(e–06)	7,4165(e-07)	9,8536(e–11)	4,6401(e–14)	2,2693(e-21)
	3,0	1,2443(e–08)	3,7514(e-02)	3,6328(e–06)	1,4729(e–08)	1,8452(e-11)
$f_4(x)$	1.2	3,2750(e-24)	1,1937(e-06)	4,2239(e-16)	4,9165(e-26)	1,5074(e-32)
	2,0	1,0784(e-16)	1,6862(e-05)	2,4000(e-11)	1,8755(e-17)	1,5476(e-24)
$f_5(x)$	1,0	2,2179(e–22)	4,5319(e-06)	1,6284(e–14)	9,0968(e–21)	4,9152(e-29)
	2,0	1,2357(e–19)	5,6773(e-05)	2,0734(e–14)	5,3942(e–18)	3,1815(e-30)
$f_6(x)$	–1,5	4,3888(e–33)	2,3408(e-04)	1,5064(e–17)	4,0291(e–15)	6,1575(e-47)
	0,0	4,3888(e–33)	2,3408(e-04)	3,7326(e–07)	3,0145(e–09)	2,4915(e-39)

Berdasarkan Tabel 2 dan 3 dapat dilihat bahwa nilai galat mutlak dan galat relatif metode iterasi (13) lebih kecil dibanding metode lainnya. Hal ini menunjukkan bahwa akurasi dan ketelitian dari metode iterasi baru lebih baik dibandingkan dengan metode iterasi lainnya.

D. Simpulan

Metode Schroder dimodifikasi dengan menggunakan ekspansi Deret Taylor orde dua dan menghilangkan turunan kedua menggunakan kesamaan dua metode iterasi. Berdasarkan analisis orde konvergensi, metode iterasi (13) memiliki orde onvergensi empat dengan $\beta = 1/2$ yang melibatkan tiga evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$ dan $f(y_n)$ dan indeks efisiensi sebesar $4^{1/3}$ $\approx$ 1,587401. Selain itu, hasil perhitungan COC menggunakan rumusan (32) mempertegas bahwa metode iterasi (13) memiliki orde konvergensi empat.

Selanjutnya, berdasarkan hasil simulasi numerik sebagaimana diberikan pada Tabel 1 menunjukkan bahwa jumlah iterasi yang dibutuhkan oleh metode iterasi (13) dalam menghampiri akar-akar persamaan nonlinier lebih sedikit dibandingan dengan metode Newton, Metode Schroder, Metode Chebyshev, dan Metode Halley. Selain itu, Tabel 2 dan 3 juga menunjukkan bahwa untuk TNFE = 12, metode iterasi (13) memiliki akurasi dan ketelitian yang lebih baik dibandingkan dengan metode iterasi yang dibandingkan.

E. Daftar Pustaka

Alamsyah, A., & Wartono, W. (2017). Modifikasi metode Chaucy tanpa turunan kedua dengan orde konvergensi empat. *Jurnal Sains Matematika dan Statistiska*, **3**(2), 59 – 66. Diakses dari http://ejournal.uin-suska.ac.id/index.php/JSMS/article/view/4477/2763

Amat, S., Busquier, S., Gutierrez, J. M., & Hernandez, M. A. (2008). On the global convergence of Chebyshev's iterative method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **220**, 17– 21. doi:10.1016/ j.cam.2007.07.022.

Baghat, M. S. M. (2012). New two-step iterative methods for solving nonlinear equations. *Journal of Mathematics Research*, **4**(3), 128 – 131. doi:10.5539/jmr.v4n3p128.

Behl, R., & Kanwar, V. (2013). Variant of Chebyshev's method with optimal order of convergence. *Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences,* **29**(1), 39 – 53.

Behl, R., Alsolami, A. J., Pansera, B. A., Al-Hamdan, W. M., Salimi, M., & Ferrara, M. (2019). A new optimal family of Schroder's method for multiple zeros. *Mathematics*, **7**(11), 1 – 14. doi :10.3390/math7111076.

Chun, C., & Kim, Y. (2010). Several new third-order iterative methods for solving nonlinear equations. *Acta Applied Mathematica*, **109**, 1053 – 1063. doi:10.1007/s.10440-008-9359-3.

Kanwar, V., & Tomar, S. K. (2007). Modified families of Newton, Halley and Chebyshev methods. *Applied Mathematics and Computation*, **192**, 20 – 26. doi:10.1016/j.amc.2007/02.119.

Kanwar, V., Sharma, K. K., & Behl, R. (2010). A new family of Schroder's method and its variants based on power means for multiple roots of nonlinear equations. *International Journal of Mathematical Education in Sciencea and Technology*, **41**(4), 558 – 565. doi: 10.1080/ 00207390903564660.

Kung, H. T., & Traub, J. F. (1974). Optimal order of one-point and multipoint iteration. *Journal of the Association for Computing Machinery*, **21**(4), 643 – 651. doi:10.1145/321850.321860.

Petkovic, L., & Petkovic, M. (2008). The link between Schorder's iteration methods of the first and second kind. Novi Sad Journal of Mathematics, **38**(3), 55 – 63.

Potra, F. A., & Ptak, V. (1984). Nondiscrete introduction and iterative processes, in: *Research Notes in Mathematics*, 103, Pitman: Boston.

Rahmawati, R., Utami, S. A., & Wartono, W. (2018). Variant of two real parameters Chun-Kim's method free second derivative with fourth-order convergence. *Proceeding of the International Conference on Mathematics and Islam (ICMIS),* Diselenggarakan oleh UIN Mataram Indonesia, 3–5 Agustus 2018 (hal. 307–313). doi:10.5220/0008521203070313.

Scavo, T. R., & Thoo, J. B. (1995). On the geometry of Halley's method. *The American Mathematical Monthly*, **102**(5), 417 – 426. doi:10.1080/ 00029890.1995.12004594.

Thukral, R. (2016). New fourth-order Schroder-type method for finding zeros of nonlinear equations having unknown multiplicity. *British Journal of Mathematics and Computer Sciences*, **13**(1), 1 – 10. doi: 10.9734/ BJMCS/2016/21820.

Thukral, R. (2017). Further accelaration of Thukral third-order method for determining multiple zeros of nonlinear equations. *American Journal of Computational and Applied Mathematics*, **7**(5), 123 –128. doi:10.5923/ j.ajcam.20170705.01.

Traub, J. F. (1964). Iterative methods for the solution of equations. Prentince-Hall Inc, NJ : Englewood Cliffs.

Wartono, W., Soleh, M., Suryani, I., Zulakmal, Z., & Muhafzan, M. (2018). A new variant of Chebyshev-Halley's method without second derivative with convergence of optimal order. *Asian Journal of Scientific Research*, **11**(3), 409 – 414. doi:10.3923/ajsr.2018.409.414.

Wartono, W., Agustiwari, R., & Rahmawati, R. (2019). New modification of Behl's method free from second derivative with an optimal order of convergence. *Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **1**(2), 10 – 19. doi:10.15408/inprime.v1i2.12787.

Weerakoon, S., & Fernando, T.G. I. (2000). A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence. *Applied Mathematics Letters*, **13**, 87 – 93. doi:10.1016/50893-9659(00)00100-2.