PERANAN SISTEM MODULO DALAM PENENTUAN HARI DAN PASARAN

Agung Handayanto[a]

[a] Program Studi Pendidikan Matematika FPMIPA IKIP PGRI

Jl. Dr. Cipto-Lontar No1 Semarang Telp. (024)8316377 Faks (024) 8448217

Abstrak

Pada paper ini dikemukakan berbagai macam rumus guna menentukan hari dan pasaran dalam kalender jawa dari tanggal yang diinginkan. Dengan menggunakan algoritma yang sesuai dengan rumus-rumus, dapat dibuat program dalam komputer, sehingga tidak diperlukan lagi perhitungan secara manual.

Kata kunci : pasaran, modulo

A. PENDAHULUAN

Teori bilangan merupakan bagian dari matematika yang tergolong sudah tua usianya. Namun demikian, akhir-akhir ini Teori Bilangan menjadi dasar dari pengembangan beberapa cabang matematika seperti cryptografi (tulisan rahasia/sandi) dan ilmu pengetahuan komputer sebagai salah satu pengembangan dalam matematika terapan. Sistem modulo merupakan bagian yang cukup penting dalam Teori Bilangan.

Salah satu penggunaan sistem modulo yang sangat menarik adalah untuk menentukan hari dan pasaran. Baik hari dan pasaran yang telah lampau ataupun yang akan datang. Syaratnya adalah tanggal, bulan dan tahun yang akan dicari hari dan pasarannya diketahui dengan pasti.

Sering kita alami kejadian untuk menentukan hari dan pasaran suatu tanggal yang kita anggap begitu bersejarah bagi kita tak berhasil kita ingat dengan benar. Mau melihat kalendar sudah lama dirobek atau bahkan sudah tidak ada lagi. Karena kesulitan mencari kalender tahun-tahun yang telah lampau untuk menentukan hari dan pasaran tanggal yang penting adalah suatu permasalahan yang harus dicari penyelesaiana atau jawabannya secara umum dan matematis. Oleh karena itu, berikut ini akan disajikan beberapa cara yang mudah dan sederhana untuk keperluan itu.

Cara yang akan sajikan di bawah ini tidak hanya dipakai untuk mengingat hari dan pasaran yang telah lampau, melainkan juga untuk menentukan hari dan pasaran yang akan datang. Tidak usah bongkar dokumen ataupun menyusun kalendar baru, asal diketahui dengan pasti tanggal, bulan, dan tahun yang bersangkutan dan berpikir sebentar.

B. TEORI RELASI KONGRUENSI

Dalam himpunan bilangan bulat, kekongruenan merupakan metode atau cara lain untuk menelaah atau menjelaskan tentang keterbagian suatu bilangan bulat. Adapun definisi kekongruenan adalah sebagai berikut.

Definisi 1.

Jika m suatu bilangan bulat positif, maka a kongruen dengan b modulo m (ditulis : $a \equiv b \pmod{m}$) jika m membagi habis (a – b), jika m tidak membagi habis (a – b) maka dikatakan bahwa a tidak kongruen dengan b modulo m (ditulis : $a \equiv b \pmod{m}$).

Dari definisi 1. diatas, muncul beberapa theorema sebagai berikut :

Theorema 1.

$a \equiv b \pmod{m}$ jika dan hanya jika ada bilangan bulat k sedemikian sehingga $a = mk + b$.

Bukti 1.

Dari definisi kekongruenan, dapat ditulis kembali bahwa : Jika $m > 0$ maka m akan membagi habis $(a - b)$ yang ditulis $m \mid (a - b)$ jika dan hanya jika $a \equiv b \pmod{m}$. Jika $m \mid (a - b)$, maka ada bilangan bulat k sedemikian sehingga $(a - b) = mk$. Sehingga $a \equiv b \pmod{m}$ jika dan hanya jika $a - b = mk$ untuk suatu bilangan bulat k. Tetapi karena $a - b = mk$ sama artinya dengan $a = mk + b$, maka $a \equiv b \pmod{m}$ jika dan hanya jika $a = mk + b$.

Theorema 2.

Setiap bilangan bulat kongruen modulo m dengan tepat satu diantara 0, 1, 2, 3, ... , (m – 1).

Bukti 2.

Menurut algoritma pembagian, jika a dan m adalah bilangan bulat dan $m > 0$, maka a dapat dinyatakan sebagai $a = mq + r$ dengan $0 \leq r < m$. Hal ini berarti bahwa : $a - r = mq$, yaitu $a \equiv r \pmod{m}$. Karena $0 \leq r < m$, maka terdapat m buah pilihan untuk r, yaitu 0, 1, 2, 3,

.... , $(m - 1)$. Jadi setiap bilangan bulat akan kongruen modulo m dengan tepat satu di antara 0, 1, 2, 3, ... , $(m - 1)$.

Definisi 2.

Jika $a \equiv r \pmod{m}$ dengan $0 \leq r < m$, maka r disebut residu (sisa) terkecil dari a modulo m. Untuk kekongruenan modulo m ini, $\{0, 1, 2, 3, \ldots, (m - 1)\}$ disebut himpunan residu terkecil modulo m.

Dari definisi 2. diatas,muncul theorema sebagai berikut.

Theorema 3.

$a \equiv b \pmod{m}$ jika dan hanya jika a dan b memiliki sisa yang sama jika dibagi oleh m.

Bukti 3.

Pertama :

Akan dibuktikan bahwa : jika $a \equiv b \pmod{m}$ maka a dan b memiliki sisa yang sama jika dibagi oleh m.

Karena $a \equiv b \pmod{m}$ maka $a \equiv r \pmod{m}$ dan $b \equiv r \pmod{m}$ dengan r adalah residu terkecil modulo m atau $0 \leq r < m$.

Dari $a \equiv r \pmod{m}$ berarti $a = mq + r$ untuk suatu bilangan bulat q.

Dari $b \equiv r \pmod{m}$ berarti $b = mt + r$ untuk suatu bilangan bulat t.

Jadi a dan b mempunyai sisa yang sama yaitu r jika dibagi oleh m.

Kedua :

Akan dibuktikan bahwa : jika a dan b mempunyai sisa yang sama jika dibagi oleh m, maka $a \equiv b \pmod{m}$.

Andaikan a mempunyai sisa yang sama (r) jika dibagi oleh m, maka $a \equiv b \pmod{m}$, hal ini berarti $a = mq + r$. Dan andaikan b mempunyai sisa yang sama (r) jika dibagi oleh m, hal ini berarti $b = mt + r$. Dari kedua persamaan tersebut diperoleh bahwa : $a - b = m(q - t)$, berarti $m \mid (a - b)$ atau $a \equiv b \pmod{m}$.

C. SIFAT RELASI KEKONGRUENAN

Kekongruenan modulo suatu bilangan bulat positif adalah suatu relasi atara bilangan-bilangan bulat. Dapat ditunjukkan bahwa relasi kekongruenan merupakan relasi ekuivalensi. Telah diketahui bahwa suatu relasi disebutrelasiekuivalensi jika relasi tersebut memiliki sifat refleksi, simetris dan transitif.

Jika m, a, b dan c adalah bilangan-bilangan bulat dengan m positif, maka

1. Sifat refleksi :

   a ≡ a (mod m)

   Bukti :

   Karena a – a = 0 = 0m, maka a ≡ a (mod m).

2. Sifat simetris :

   Jika a ≡ b (mod m), maka b ≡ a (mod m)

   Bukti :

   Karena a ≡ b (mod m), maka a – b = km untuk suatu bilanagan bulat k, sehingga b – a = - km yang berarti bahwa b ≡ a (mod m)

3. Sifat transitif :

   Jika a ≡ b (mod m) dan b ≡ c (mod m), maka a ≡ c (mod m)

   Bukti :

   Karena a ≡ b (mod m), maka a – b = km untuk suatu bilanagan bulat k.

   Karena b ≡ c (mod m), maka b – c = hm untuk suatu bilanagan bulat h.

   Jika kedua ruas dijumlahkan, maka akan diperoleh : a – c = (k – h) m yang berarti bahwa : a ≡ c (mod m).

D. SISTEM MODULO 7

Sekarang akan diperkenalkan sistem modulo 7 yang memainkan peranan penting dalam penentuan hari. Sistem ini hanya menggunakan tujuh lambang bilangan, yakni: 0, 1, 2, 3, 4, 5 dan 6. Jumlahan di dalam sistem modulo 7 adalah sama seperti jumlah biasa, kecuali jika jumlah itu lebih besar dari 6, kita bagi jumlah itu dengan 7 dan gunakan sisa itu di tempat jumlah biasa. Oleh karena itu : 1 + 3 = 4, tetapi 5 + 4 = 2 karena jika 9 dibagi 7 sisanya 2.

Di bawah ini adalah tabel penjumlahan dari sistem modulo 7

Tabel 1. Sistem Modulo 7

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

E. MENENTUKAN HARI

Pandang himpunan H = {Minggu, Senin, Selasa, Rabu, Kamis, Jum'at, Sabtu}. Dengan menggunakan tiga pengertian pokok, yakni:

1. Sistem modulo 7.
2. Tahun biasa = 365 hari.
3. Tahun kabisat = 366 hari (tahun yang bilangannya habis dibagi empat).

Maka akan muncul rumus-rumus yang dapat dipakai untuk mencari hari dari tanggal, bulan, dan tahun yang diinginkan. Pada prinsipnya jumlah semua hari dari Kalendar Masehi dimulai dari tanggal 1 bulan Januari tahun 1 sampai dengan tanggal x bulan y tahun z yang akan dicari harinya, dihitung kemudian hasilnya dibagi dengan 7.

Dengan beberapa percobaan yang nanti akan kami uraikan, ternyata apabila sisanya nol jatuh pada hari sabtu, bila sisanya 1 jatuh pada hari Minggu dan seterusnya akhirnya bila sisanya 6 jatuh pada hari Jum'at, seperti pada tabel berikut ini.

Tabel 2. Sisa Hari

Sisa	Hari
0	Sabtu
1	Minggu
2	Senin
3	Selasa
4	Rabu
5	Kamis

6	Jum'at

Perlu diketahui bahwa jumlah hari tahun biasa = 365 hari, berarti 365 = 1 (modulus 7), sedangkan jumlah hari tahun kabisat = 366 hari, berarti 366 = 2 (modulus 7). Suatu tahun tertentu dapat dinyatakan sebagai jumlahan tahun biasa dan tahun kabisat, sehingga jumlah harinya juga dapat dihitung. Misal A tahun = B tahun biasa + C tahun kabisat. Jumlah hari itu dibagi dengan 7, misalkan : A = B + 2 C = D = 7 E + F

dimana E : bilangan asli hasil pembagian D oleh 7.

F : sisa pembagian.

maka A tahun = F hari (modulus 7).

Dengan sedikit gambaran di atas maka untuk menentukan hari tertentu dapat dipergunakan beberapa cara sebagai berikut.

Cara I :

Menggunakan rumus :

U + V – W = S (modulus 7) ....(1)

dengan, U : jumlah tahun

V : bilangan bulat terbesar dari (U/4)

W : jumlah hari dari tanggal (p + l) sampai dengan 31 Desember (lihat tabel 3).

S : sisa pembagian modulo 7 (lihat tabel 2).

Tabel 3. Jumlah hari tiap-tiap bulan

Bulan	Tahun biasa / kabisat	Bulan	Tahun biasa / kabisat
Januari	31	Juli	31
Februari	28 / 29	Agustus	31
Maret	31	September	30
April	30	Oktober	31
Mei	31	November	30
Juni	30	Desember	31

Sebagai ilustrasi akan ditentukan hari kemerdekaan RI, tanggal 17 Agustus 1945 jatuh pada hari apa ?

Dengan menggunakan rumus (1) :

U + V – W = S (modulus 7**)**, maka berarti :

U = 1945

V = (U/4) = (1945/4) = 486.25 = 486

W = jumlah hari dari 18 Agustus – 31 Desember

= 14 + 30 + 31 + 30 + 31 = 136

sehingga, U + V – W = 1945 + 486 – 136 = 2295 = 6 (modulo 7)

Kesimpulan, karena S = 6, maka menurut Tabel 2 : 17 Agustus 1945 jatuh pada hari Jum'at.

<u>Cara II</u> :

Menggunakan rumus :

X + Y + Z = S (modulus 7) ....(2)

dengan, X : U – 1 (U adalah jumlah tahun)

Y : bilangan bulat terbesar dari (X/4)

Z : jumlah hari dari tanggal l Januari sampai tanggal yang dicari (lihat tabel 3).

S : sisa pembagian modulo7 (lihat tabel 2).

Sebagai ilustrasi akan ditentukan hari kemerdekaan RI, tanggal 17 Agustus 1945 jatuh pada hari apa?

Dengan menggunakan rumus (2) :

X + Y + Z = S (modulus 7**)**, maka berarti :

X = U -1 = 1945 -1 = 1944

Y = (X/4) = (1944/4) = 486

Z = jumlah hari dari 1 Januari – 17 Agustus

= 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 17 = 229

sehingga, X + Y + Z = 1944 + 486 + 229 = 2659 = 6 (modulo 7)

Kesimpulan, karena S = 6, maka menurut Tabel 2 : 17 Agustus 1945 jatuh pada hari Jum'at.

<u>Cara III</u> :

Untuk abad ke 20, menggunakana rumus :

K + L + M – N = S (modulus 7) ....(3)

Untuk abad ke n menggunakan rumus :

K + L + M – N + (20 – n) = S (modulus 7) ....(4)

dengan:

K : jumlah tahun dalam satu abad yang bersangkutan, untuk tahun 1945 maka K = 45.

L : jumlah tahun kabisat dalam satu abad yang bersangkutan, untuk tahunn 1945 maka (45/4) = 11.25 = 11.

M : tanggal yang akan dicari harinya.

N : harga bulan (angka-angka) dicari dari table dibawah ini.

S : sisa pembagian (lihat tabel 2).

Tabel 4. Harga Bulan (N)

Bulan	Tahun biasa / kabisat	Bulan	Tahun biasa / kabisat
Januari	6 / 0	Juli	0
Februari	3 / 4	Agustus	4
Maret	3	September	1
April	0	Oktober	6
Mei	5	November	3
Juni	2	Desember	1

Harga bulan N untuk bulan Januari dan Februari masing-masing ada dua macam tergantung pada tahun biasa atau tahun kabisat.

Sebagai ilustrasi akan ditentukan hari kemerdekaan RI, tanggal 17 Agustus 1945 jatuh pada hari apa ?

Dengan menggunakan rumus (3) :

K + L + M – N = S (modulus 7**)**, maka berarti :

K = 1945= 45

L = (K/4) = (45/4) = 11.25 = 11

M = tanggal 17 = 17

N = harga bulan Agustus = 4

sehingga, K + L + M – N = 45 + 11 + 17 – 4 = 69 = 6 (modulo 7)

Kesimpulan, karena S = 6, maka menurut Tabel 2 : 17 Agustus 1945 jatuh pada hari Jum’at.

F. MENENTUKAN PASARAN

Seperti pada menentukan hari yang menggunakan modulo 7, dalam mementukan pasaran menggunakan modulo 5. Telah diketahui bahwa nama pasaran adalah Wage, Kliwon, Legi, Pahing, dan Pon. Dalam menentukan pasaran juga masih tergantung pada jumlah hari tahun biasa dan kabisat, yaitu 365 hari dan 366 hari, sehingga dalam menentukan pasaran diperlukan nilai/harga bulan seperti pada tabel 5.

Tabel 5. Harga Bulan (B)

Bulan	Tahun biasa / kabisat	Bulan	Tahun biasa / kabisat
Januari	0 / 1	Juli	4
Februari	4 / 0	Agustus	3
Maret	1	September	2
April	0	Oktober	2
Mei	0	November	1
Juni	4	Desember	1

Dari hasil percobaan diperoleh tabel sisa pasaran untuk harga S sebagai berikut.

Tabel 6. Sisa Pasaran

Sisa	Pasaran
0	Legi
1	Pahing
2	Pon
3	Wage
4	Kliwon

Dengan sedikit gambaran di atas maka untuk menentukan pasaran tertentu dapat dipergunakan rumus yang berlaku untuk sembarang abad sebagai berikut.

L + M – B = S (modulus 5) ....(5)

dimana,

L : jumlah tahun kabisat dalam satu abad yang bersangkutan

M : tanggal yang akan dicari pasarannya

B : harga bulan untuk menentukan pasaran (lihat tabel 5).

S : sisa pembagian modulo 5 (lihat tabel 6).

Sebagai ilustrasi akan ditentukan pasaran kemerdekaan RI, tanggal 17 Agustus 1945 jatuh pada pasaran apa?

Dengan menggunakan rumus (5) :

L + M – B = S (modulus 5**)**, maka berarti :

L = (45/4) = 11.25 = 11

M = tanggal 17 =17

B = harga bulan pada tabel 5 = 3

sehingga, L + M – B = 11 + 17 - 3 = 25 = 0 (modulo 5)

Kesimpulan, karena S = 0, maka menurut Tabel 6 : 17 Agustus 1945 jatuh pada pasaran LEGI.

G. PENUTUP

Pada pembahasan di atas telah dikemukakan berbagai macam rumus guna menentukan hari dan pasaran dari tanggal yang diinginkan. Dengan menggunakan algoritma yang sesuai dengan rumus-rumus, dapat dibuat program dalam komputer, sehingga tidak diperlukan lagi perhitungan secara manual.

Pembahasan tersebut belum mencakup tentang bagaimana timbulnya table 4, 5 dan table 6. Namun demikian diharapkan semoga pembahasan ini dapat memberikan gambaran untuk maksud tersebut. Mudah-mudahan tulisan yang sederhana dan singkat ini berguna bagi kita semua.

DAFTAR PUSTAKA

Burton, D.M. 1980. *Elementary Number Theory*. Boston: Allyn &Bacon.

Niven, I. dan H.S. Zuckerman. 1976. *Introduction to The Theory of Numbers*. New Delhi. Willey Eastern Ltd.

Sukirman, H. 2004. *Pengantar Teori Bilangan*. Yogyakarta.UNY.