PENERAPAN KALKULUS STOKASTIK PADA MODEL OPSI

Nizaruddin
Program Studi Pendidikan Matematika FPMIPA IKIP PGRI Semarang
Jl. Sidodadi Timur 24 Semarang

Abstrak

Opsi merupakan salah satu pilihan investasi yang mampu mengakomodasikan keinginan investor untuk dapat menanmkan modalnya dengan resiko kecil, sehingga opsi ini cocok diterapkan di negara dengan ekonomi yang tidak stabil. Dalam penelitian ini, melalui penerapan teori-teori kalkulus stokastik akan dibahas modeal persamaan harga yang diturunkan dari nilai aset suatu perusahaan yang merupakan refleksi dari kepemilikan saham dan bon perusahaan dengan perubahan harga saham mengikuti asumsi Black dan Scholes.

$$\mathrm{d}S(t) = \mu(t)\, S(t)\mathrm{d}t + \sigma(t)\, S(t)\, \mathrm{d}W(t)$$

Disamping itu juga diturunkan model harga opsi melalui present value ekspetasi selisih antara nilai strike price dengan harga saham pada saat t

Kata Kunci : Opsi, stokastik, Black dan Scholes

1. Pendahuluan

Keadaan ekonomi suatu negara yang tidak menentu baik sebagai dampak dari kondisi politik maupun fundamental ekonomi makronya sendiri mengakibatkan ketidakstabilan pada harga pasar dan sekuritas. Kondisi ini memunculkan keragua-raguan para investor untuk menanamkan modal usaha pada negara itu. Untuk itu deperlukan suatu alteernatif yang sekiranya mampu menjembatani keinginan investor tersebut untuk turut berpartisipasi dalam dunia usaha dan salah satunya adalah *opsi*.

Namun demikian penerbiatan kontrak opsi ini di Indonesia belum lazim digunakan walaupun kondisi di Indonesia dapat dikatakan mengundang keraguan dan ketakutan para investor menanamkan modalnya di Indonesia. Hal ini dimungkinkan karena belum adanya undang-undang mengenai kontrak opsi atau juga karena kurangnya pemahaman mengenai opsi itu sendiri.

Sementara itu dipandang dari sudut modelnya, model harga opsi yang sering digunakan adalah penurunan dari model harga saham yang dikembangkan oleh *Fisher Black* dan Myron *Scholes* yang menyatakan

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

μ = rata-rata dari pengembalian saham

σ = volatilitas dari harga saham

dt = periode waktu

$dW(t)$ = variabel acak dengan rataan 0 dan variansi 1 dengan *W(t)* mengikuti proses gerak Brown.

Persamaan ini disebut persamaan differensial stokastik. Akan tetapi persamaan ini memunculkan banyak pertanyaan seperti bagaimana mencari solusi persamaan yang mengandung variabel yang mengikuti gerak *Brown* dan lain sebagainya.

Untuk itulah pada tulisan ini akan dibhas penurunan model nilai opsi melalui analisis penyelesaian persamaan differensial stokastik yang disebut persamaan differensial dasar untuk harga *contingent claim* sebagai akibat tergantungnya harga opsi pada perubahan harga saham dan juga untuk memperoleh harga opsi yang menunjukkan sebagai *present value* nilai ekspektasi selisih harga *strike price* dengan harga saham pada saat tertentu.

2. Kalkulus Stokastik

2.1 Proses Wiener atau Proses Gerak Brown

Definisi 1 *Proses stokastik* $\{W(t), t \geq 0\}$ disebut proses Wiener (sering juga disebut proses gerak Brown) apabila:

1. $W(0) = 0$
2. $\{W(t), t \geq 0\}$ *mempunyai kenaikan bebas dan stasioner (stationary independent increment) untuk setiap t > 0,*
3. $W(t)$ *berdistribusi normal dengan rataan 0 dan varian* $\sigma^2 t$

Selanjutnya jika σ^2 = 1, disebut proses Wiener baku. Kemudian jika $\{W(t), t \geq 0\}$ suatu proses gerak Brown baku, maka $Y(t) = W(t) + \mu t$ merupakan gerak Brown dengan koefisien drift μ dan $S(t) = e^{W(t)}$ disebut gerak Brown geometri dimana proses gerak Brown geometri ini tidak pernah bernilai negatif.

2.2 Martingale

Definisi 2 *Misalkan* (Ω, F, P)*adalah ruang probabilitas dan* $F_1(t) \subseteq F_2(t) \subseteq \ldots \subseteq F_n(t) \subseteq F$, $t \in T$ *keluarga tak turun dari aljabar* $-\sigma F(t)$. *Fungsi acak* $M(t), t \subseteq T$ *disebut Martingale terhadap keluarga aljabar* $-\sigma F(t)$, *jika:*

1. *Fungsi acak M(t) teradaptasi dari keluarga aljabar* $-\sigma F(t)$
2. $E[M(t)] < \infty$ *untuk seluruh* $t \geq 0$
3. $E\,[M(t)|F(s)] = M(s)$ *untuk setiap* $s \leq t$

Teorema 3 *Jika W proses gerak Brown baku, maka W martingale*

2.3 Lemma Ito

Misalkan diberikan persamaan differensial stokastik:

$$dS(t) = K(t, S(t)dt + L(t, S(t)dW(t)$$

Dengan S(t) suatu proses stokastik dan W(t) proses Wiener.

Persamaan di atas selanjutnya dapat ditulis sebagai persamaan integral berikut:

$$S(t) = c + \int_{t_0}^{t} K\big(u, S(u)\big)du + \int_{t_0}^{t} L\big(u, S(u)\big)dW(u)$$

Dari persamaan integral di atas nilai dari $\int_{t_0}^{t} K\big(u, S(u)\big)du$ dapat diselesaikan dengan cara biasa yaitu dengan menggunakan integral Riemann, tetapi bagian $\int_{t_0}^{t} L\big(u, S(u)\big)dW(u)$ harus diselesaikan dengan menggunakan Formula Ito.

Lemma 4 Misalkan proses S(t) mempunyai persamaan differensial stokastik

$$dS(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)$$

Dan $v(t, x)$ adalah fungsi kontinyu dan mempunyai turunan $\frac{dv(t,x)}{dt}, \frac{dv(t,x)}{dx}, \frac{d^2v(t,x)}{dx^2}$ kontinyu.

Maka $v(t, S(t))$ merupakan proses differensial stokastik dan

$$dv\big(t, S(t)\big) = \left[\frac{dv(t, S(t))}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2v\big(t, S(t)\big)}{dx^2}b^2(t) + \frac{dv\big(t, S(t)\big)}{dx}a(t)\right]dt + \frac{dv\big(t, S(t)\big)}{dx}b(t)dW(t)$$

Formula di atas disebut dengan formula Ito

2.4 Teorema Girsanov

Teorema 5 Misalkan W proses gerak Brown baku dengan ukuran peluang P dan misalkan

$$\int_0^t k^2 ds < \infty$$

Serta misalkan

$$H(T) = exp\left[\int_0^t -kdW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t k^2 ds\right]$$

Kemudian definisikan

$$d\tilde{P} = H(T)dP$$

Maka

$$\widetilde{W}(t) = W(t) - \int_0^t kds$$

Merupakan proses gerak Brown terhadap ukuran $\tilde{P}$.

3. Sekuritas

Seperti dijelaskan sebelumnya, bahwa pembahasan harga opsi tidak dapat dilepaskan dari perubahan tentang sekuritas turunan yang lain. Untuk itu pada bab ini akan dibahas masalah sekuritas yang berkaitan dengan nilai opsi.

4. Nilai Aset

Aset dalam bahasan ini adalah **Aset Finansial** yang didefinisikan Spreij[3] pendanaan yang berusaha mengkonversikan aktiva-aktiva tertentu menjadi dana kas kerja dan nilai aset ini dipengaruhi oleh dua jenis sekuritas yakni saham dan bon. Oleh sebab itu selanjutnya akan dibahas nilai dari saham dan bon.

4.0.1 Harga Saham

Saham merupakan suatu aset finansial yang nilainya bergerak mengikuti harga pasar sesuai dengan besarnya penawaran dan permintaan. Sehingga pada jangka waktu tertentu harga saham dapat mengalami kenaikan maupun penurunan atau bahkan dapat pula tidak mengalami perubahan harga. Oleh karena itu saham merupakan aset beresiko.

Sementara itu *Fisher Black dan Meyron Scholes* [15] mengasumsikan bahwa perubahan nilai dari saham mengikuti Gerak Brown sebagaiman di bawah ini. Misalkan S(t) harga saham, maka

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \qquad (1)$$

Dimana:

μ = rata-rata dari pengembalian saham

σ = volatilitas dari harga saham

dt = periode waktu

$dW(t)$ = varibel acak dengan $dW(t)$ mengikuti proses gerak Brown dengan rataan 0 dan variansi 1.

Oleh karenanya diperoleh model harga saham adalah:

$$S(t) = S(0)exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right]$$

Dimana S(0) adalah harga awal dari suatu saham saham.

Persamaan ini mencerminkan bahwa harga saham mengikuti proses gerak Brown geometri, sehingga harga saham tidak akan bernilai negatif.

4.1 Harga Bon

Bon merupakan salah satu aset tanpa resiko yang bersifat deterministik, dimana perubahannya bergantung dari tingkat suku bunga yang berlaku. Pada penentuan harga opsi tingkat suku bunga yang digunakan untuk aset tanpa resiko ini adalah konstan [4], yang mana perubahannya dirumuskan sebagai:

Misalkan B(t) adalah harga bon, maka perubahannya adalah:

$$dB(t) = rB(t)dt$$

Sehingga model harga bon.

$$B(t) = B(0)e^{rt}$$

Dengan r adalah tingkat suku bunga

4.2 Nilai Aset dan Strategi Lindung Nilai

Seperti dijelaskan pada sub bab sebelumnya, nilai *aset finansial* dipengaruhi oleh *saham* dan *bon*. Sehingga dapat dirumuskan banyaknya aset X(t) adalah

$$X(t) = N_1 S(t) + N_0 B(t) \qquad \text{.....(2)}$$

Dimana:

$X(t)$ adalah nilai kekayaan

N_1 adalah banyak unit dari saham

N_0 adalah banyak unit dari bon

Persamaan (2) merupakan nilai portfolio (N_0, N_1) dan merupakan **self-financing** dengan $X(0) = x \; dan \; X(T) = f_T$ merupakan harga layak suatu *contingent claim* (klaim tidak pasti) pada waktu T dengan perubahan harga hanya bergantung pada perubahan harga aset.

Akibatnya perubahan dari aset dapat dirumuskan

$$\begin{aligned} dX\,(t) &= N_1 dS(t) + N_0 dB(t) \\ &= N_1 S(t)[\mu dt + \sigma dW(t)] + N_0 r B(t) dt \qquad \text{.....(3)} \end{aligned}$$

Persamaan (3) merupakan refleksi perubahan proses aset yang disebabkan perubahan harga saham dan bon.

Dengan memasukkan

$$W(t) = W(t) + \frac{\mu - r}{\sigma} t$$

Didapat perubahan aset pada ukuran $\tilde{P}$ menjadi

$$\begin{aligned} dX_t &= N_1 S(t)\left[\mu dt + \sigma\left(d\widetilde{W}(t) - \frac{\mu - r}{\sigma} dt\right)\right] + N_0 r B(t) dt \\ &= N_1 S(t)\left[r dt + \sigma d\widetilde{W}(t)\right] + N_0 r B(t) dt \end{aligned}$$

Nilai perubahan aset ini selanjutnya akan digunakan pada penentuan *Persamaan Differensial Dasar untuk Contingent claim*.

Sementara itu secara faktual $\tilde{E}X(T) \le x$ dimana $x = X(0)$. Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut: Misalkan $\{T_n\}$ barisan waktu exercise X dengan$\{ X_{T_n \frown t}, t \in [0.T]\}$ adalah $\tilde{P}$ martingale untuk setiap n, maka dengan menggunakan lemma Fatou's diperoleh

$\tilde{E}X(T) = \tilde{E} \lim_{n\to\infty} X(T_n \frown T) \le \lim_{n\to\infty} inf\, \tilde{E}X(T_n \frown T) = \tilde{E}X(0) = x$

Berdasarkan (6) diperoleh bahwa batas bawah harga layak dari suatu *contingent claim* lebih kecil atau sama dengan dari niali awal aset ($\tilde{E}f_T \le x$, dimana f_T harga *contingent claim* pada T). Hal ini dapat diterima karena apabila harga dari suatu barang adalah h_0, maka tidak ada seorangpun yang bersedia membeli barang tersebut dengan harga h>h

Selanjutnya apabila $\tilde{E}f_T = x$ dan r=0 dapat ditunjukkan **strategi lindung nilai** dimana **strategi lindung nilai** merupakan strategi yang digunakan untuk mengimbangi resiko investasi. Cegah resiko yang sempurna adalah meniadakan kemungkinan perolehan atau kerugian di kemudian hari. Utnuk menunjukkan bahwa aset memenuhi strategi lindung nilai dapat dicari sebagai berikut:

Misalkan

$M_t = E[f_T|F_t] - E[f_T]$

Menurut persamaan representasi teorema martingale [1] terdapat Y sedemikian sehingga

$$M_t = \int_0^t Y_s d\widetilde{W}_s$$

Pilih

$$N_1(t)S(t) = \frac{Y_t}{\sigma(t)}$$

Sehingga diperoleh

$$dX_t = Y_t d\widetilde{W}_t$$

Jadi

$$\begin{aligned} X_t &= x + M_t \\ &= x + \tilde{E}[f_T|F_t] - \tilde{E}[f_T] \\ &= \tilde{E}[f_T|F_t] \end{aligned}$$

Dengan demikian ada strategi lindung nilai.

4.3 Present Value Coningent Claim

Selanjutnya apabila $r \neq 0$ menurut Baxter [1] untuk menghitung nilai claim dilakukan dengan memperhitungkan proses diskonto terhadap bon. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f_T &= \tilde{E}\left[\frac{B_0(t)}{B_0(T)} f_T \middle| F_t\right] \\ &= e^{-r(T-t)}\tilde{E}[f_T|F_t] \end{aligned}$$

Persamaan ini menyatakan bahwa nilai dari opsi adalah *present value* akspektasi dari nilai *contingent claim* f_T pada saat $t \leq T$.

4.4 Persamaan Differensial Dasar untuk Penentuan Harga Contingent Claim

Sementara itu melalui permisalan $f_T = v\big(t, S(t)\big), t \leq T$ merupakan harga *contingent claim* f_T pada waktu t. Dengan menggunakan lemma Ito diperoleh

$$\begin{aligned} dv\big(t, S(t)\big) &= \left(\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2v}{dS(t)^2}\sigma^2 S^2(t)\right)dt \\ &\quad + \frac{dv}{dS(t)}(\mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)) \end{aligned}$$

Padahal

$$\begin{aligned} dv\big(t, S(t)\big) &= df_t \\ &= dX_t \end{aligned}$$

$$= N_1 S(t)[\mu dt + \sigma dW(t)] + N_0 r B(t) dt$$

Oleh karena $dv\big(t, S(t)\big)$ bernilai tunggal [15], maka koefisien dari dt dan dW(t) pada persamaan (8) dan (9) sama, sehingga

$$N_1 = \frac{dv}{dS(t)}$$

Dan

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2 v}{dS(t)^2}\sigma^2 S^2(t) = 0$$

Selanjutnya dari persamaan (2) dan (10) diperoleh

$$N_0 = \frac{1}{B(t)}(X(t) - N_1(t)S(t))$$

$$= \frac{1}{B(t)}\left(X(t) - \frac{dv}{dS(t)}S(t)\right)$$

$$= \frac{1}{B(t)}\left(v\big(t, s(t)\big) - \frac{dv}{dS(t)}S(t)\right)$$

Akibatnya persamaan (5) menjadi

$$dv\big(t, S(t)\big) = \frac{dv}{dS(t)}(\mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t))$$

$$+ \left(rv\big(t, s(t)\big) - r\frac{dv}{dS(t)}S(t)\right)dt$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2 v}{dS(t)^2}\sigma^2(t)S^2(t) = r(t)v\big(t, s(t)\big) - r(t)\frac{dv}{dS(t)}S(t)$$

Atau

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\frac{d^2 v}{dS(t)^2}\sigma^2(t)S^2(t) + r(t)\frac{dv}{dS(t)}S(t) - r(t)v\big(t, S(t)\big) = 0$$

Persamaan ini disebut **Persamaan Differensial Dasar untuk Penentuan Harga Contingent Claim** dan berlaku untuk semua jenis *contingent claim*, hanya saja syarat batas untuk masing-masing jenis *contingent claim* berbeda-beda.

Selanjutnya untuk menyelesaikan persamaan differensial ini dilakukan dengan melakukan transformasi ke persamaan panas dengan memisalkan $r(t) = r \; dan \; \sigma^2(t) = \sigma^2$.

Definisikan

$$\tau = \sigma^2(T - t)$$

$$Z(t) = \ln S(t) + \left(r - \frac{\sigma}{2}\right)(T - t)$$

Dan himpunan

$$U(\tau, Z) = e^{r(T-t)} v\big(t, S(t)\big)$$

Akan diperoleh persamaan panas

$$\frac{dU}{d\tau} - \frac{1}{2}\frac{d^2U}{dZ^2} = 0$$

Dimana solusi dari persamaan tersebut:

$$U(\tau, Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi \frac{1}{2} r}} e^{-\frac{(y-Z)^2}{2\tau}} g(y) dy$$

Dimana $g(y) = U(0, y)$ merupakan syarat batas persamaan

5. Harga Opsi

5.0.1 Pengertian Opsi

Opsi adalah hak untuk melakukan transaksi (jual/beli) atas suatu aset pada suatu periode tertentu dengan nilai pada saat jatuh tempo telah ditentukan. Dalam hal ini pemegang opsi dapat melakukan jual/beli aset sebelum atau pada saat jatuh tempo(*maturity date*) dimana nilai pada saat jatuh tempo tertentu dan nilai sebelumnya tidak ditentukan. Nilai pada saat jatuh tempo disebut (*Strike Price*).

Oleh karenanya keputusan pemegang opsi melakukan transaksi (meng-*exercise*) atas aset sangat tergantung oleh harga pasar dari aset tersebut. Oleh sebab itu kontrak opsi ini disebut *continget claim* (klaim yang tidak pasti)

Opsi diperoleh apabila seseorang membeli opsi ke penjual opsi dan jual beli ini merupakan suatu ikatan dan disebut **kontrak opsi** yang memberikan hak dan kewajiban kepada penjual dan pembeli opsi. Pembeli opsi selaku pemegang opsi berhak menjual/membeli atas aset dengan nilai dan dalam kurun waktu sebagaimana dalam kontrak dengan kewajiban membayar sejumlah nilai tertentu yang disebut dengan *premi*. Sedangkan penjual opsi yang merupakan penulis opsi berkewajiban melakukan transaksi sesuai dengan kontrak dengan imbalan mendapat *premi*.

Kemudian apabila ditinjau dari hak melakukan transaksi, kontrak opsi dapat dibedakan menjadi dua yaitu *opsi call* dan *opsi put*. *Opsi call* memberikan hak kepada pemegang opsi untuk membeli aset dari penjual opsi seharga *Strike Price*, sedangkan *opsi put* memberikan hak kepada pemegang opsi untuk menjual aset kepada penjual opsi seharga *Strike Price*.

Pada *Opsi call*, apabila pada saat jatuh tempo harga pasar dari saham lebih tinggi dari *Strike Price*, maka disebut *opsi in the money*, sebaliknya pada *opsi put, opsi in the money* dicapai apabila harga pasar lebih rendah dari *Strike Price*. Selanjutnya pada *Opsi call*, apabila pada saat jatuh tempo harga pasar dari saham lebih rendah dari *Strike Price*, maka disebut *opsi out of teh money*, sebaliknya pada *opsi put, opsi out of the money* dicapai apabila harga pasar lebih rendah dari *Strike Price*.

Kemudian apabila harga pasar suatu saham sama dengan *Strike Price*, maka disebut *opsi at the money*.

6. Model Harga Opsi

Sebagaimana dijelaskan pada sub bab sebelumnya, bahwa nilai opsi merupakan salah satu jenis *contingent claim*. Oleh karenanya untuk mendapatkan nilai opsi dapat dilakukan dengan mencari solusi dari **Persamaan Differensial Dasar untuk Harga Contingent Claim** sebagaimana persamaan (11) dan melalui transformasi ke persamaan panas diperoleh solusinya seperti persamaan (14) dimana g(y)=U(0,y) merupakan syarat batas untuk nilai opsi dengan syarat batas tiap opsi berbeda.

6.1 Opsi Call

Sebagaimana dijelaskan di atas bahwa syarat batas masing-masing jenis opsi berbeda-beda. Untuk opsi call syarat batasnya [15] adalah $U(0,Z) = maks(e^Z - K) = maks(S(T) - K) = (S(T) - K)^+$, dimana K adalah *strike price.*

Perhatikan bahwa apabila $\tau = 0$, maka $Z = \ln S(T)$. Akibatnya $e^y = S(T) atau\ y = \ln S(T)$

Selanjutnya dari persamaan (12) didapat

$$v(t, S(t)) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} (S(T) - K)^+ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln S(T) - (\ln S(t) + \left(r - \frac{\sigma}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)^2} dy$$

Kemudian dengan memperhatikan bahwa pelepasan *opsi call* dilakukan apabila harga saham pasar lebih dari atau sama dengan K (*strike price*), atau dengan kata lain tidak ada pelepasan opsi apabila S(T)<K. Sehingga abatas bawah dari pelepasan opsi adalah jika S(T)=K atau $e^y = K$ yang berakibat $y = \ln K$. Sedangkan batas atas harga opsi sendiri tidak terbatas atau $S(T) \to \infty$ yang berakibat $y \to \infty$. Sehingga didapat

$$v(t, S(t)) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \int_{\ln K}^{\infty} (S(T) - K) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln S(T) - (\ln S(t) + \left(r - \frac{\sigma}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)^2} d \ln S(T)$$

Selanjutnya dengan memisalkan

$$w = \frac{(\ln S(T) - \ln S(t)) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

Dengan mengganti $\ln S(t) = w$ batas bawah integral (15) menjadi

$$\omega = \frac{-\ln\frac{S(t)}{K} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

Dengan demikian

$$S(T) = S(t)exp\left\{w\sigma\sqrt{(T-t)} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right\}$$

Sehingga

$$v\big(t, S(t)\big) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega}^{\infty} S(t)e^{\left\{w\sigma\sqrt{(T-t)} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right\} - \frac{1}{2}w^2} dw$$

$$- \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega}^{\infty} Ke^{-\frac{1}{2}w^2}\, dw$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S(t) \int_{\omega}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(w - \sigma\sqrt{(T-t)}\right)^2}\, dw$$

$$- \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} K \int_{\omega}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw$$

$$= S(t)\Phi\left(-\omega + \sigma\sqrt{(T-t)}\right) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(-\omega)$$

$$= S(t)\Phi\left(\frac{\ln\frac{S(t)}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$

$$-Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S(t)}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$

Dimana Φ adalah fungsi distribusi normal (0,1)

Sementara itu dari (7) untuk opsi call dengan nilai $f_T = (S(t) - K)^+$ diperoleh

$$f_T = e^{-(T-t)}\tilde{E}[(S(T) - K)^+ | F_t]$$

$$= e^{-(T-t)}\tilde{E}\left[\left(S_t e^{\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\left(W(T) - W(t)\right)\right]} - K\right)^+ \middle| F_t\right]$$

Merupakan present value dari ekspektasi selisih antara harga saham pada saat t yaitu S_t dengan nilai strike price. Sehingga dapat

$$f_T = e^{-(T-t)}\tilde{E}[(S(T) - K)^+ | F_t]$$

$$= e^{-(T-t)}\tilde{E}\left[\left(S_t e^{\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\left(W(T) - W(t)\right)\right]} - K\right)^+ \middle| F_t\right]$$

$$= e^{-(T-t)}E\left[\left(S_t e^{\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\left(W(T) - W(t)\right)\right]} - K\right)^+ \middle| S_t\right]$$

$$= e^{-(T-t)} E\left[\left(ae^{b\xi-\frac{b^2}{2}} - K\right)^2 \middle| S_t\right]$$

Dimana

$a = S_t e^{r(T-t)}, b = \sigma\sqrt{(T-t)}, dan\ \xi \sim N(0,1)$

Oleh karena [15]:

$$E\left[\left(ae^{b\xi-\frac{b^2}{2}} - K\right)^2 \middle| S_t\right] = a\Phi\left(\frac{\ln\frac{a}{K} + \frac{1}{2}b^2}{b}\right) - K\Phi\left(\frac{\ln\frac{a}{K} - \frac{1}{2}b^2}{b}\right)$$

Sehingga dari (??) dan (17) diperoleh

$$f_T = S(t)\Phi\left(\frac{\ln\frac{S(t)}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$

$$-Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S(t)}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$

Dimana Φ adalah fungsi distribusi normal (0,1)

Dari penurunan melalui persamaan panas sebagaimana pada persamaan 9160 dan melalui ekspektasi seperti persamaan (18) didapatkan model harga opsi yang sama

6.2 Opsi Put

Untuk menetukan nilai dari opsi put dapat dilakukan dengan cara yang sama dengan mencari harga dari nilai opsi call dengan memperhatikan bahwa syarat batas dari opsi put (15) adalah $U(0, Z) = maks(e^Z - K) = maks(S(T) - K)^+$ dimana exercise dilakukan apabila harga di pasar kurang dari atau sama dengan K(strike price), atau artinya tidak ada pelepasan opsi apabila S(T)<K. Sehingga batas atas dari pelepasan opsi adalah jika S(T)=K atau $e^y = K$, yang berkibat $y = \ln K$. Sedangkan batas bawah harga opsi sendiri tidak terbatas atau $S(T) \to \infty$ yang berakibat $y \to \infty$. Sehingga (7) menjadi

$$v(t, S(t)) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \int_{\ln K}^{\infty} (S(T) - K)$$

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln S(T) - (\ln S(t) + \left(r - \frac{\sigma}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)^2} d\ln S(T)$$

Akibatnya (16) menjadi

$$v\big(t,S(t)\big)=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\omega}^{\infty}Ke^{-\frac{1}{2}\omega^2}dw$$

$$-\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\omega}^{\infty}S(T)e^{\left\{\omega\sigma\sqrt{(T-t)}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right\}}e^{-\frac{1}{2}\omega^2}dw$$

$$=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}K\int_{\omega}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}w^2}dw$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}S(t)\int_{\omega}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(w-\sigma\sqrt{(T-t)}\right)^2}dw$$

$$=Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{-\ln\frac{S(t)}{K}-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$

$$-S(t)\Phi\left(\frac{-\ln\frac{S(t)}{K}-\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$

Dimana Φ adalah fungsi distribusi normal (0,1)

Sedangkan dari penghitungan ekspektasi selisih antara nilai strike price dengan harga saham pada saat t adalah S_t, diperoleh

$$f_t\ =e^{-(T-t)}\tilde{E}\left[\big(K-S(T)\big)^2\middle|F_t\right]$$

$$=e^{-(T-t)}\tilde{E}\left[\left(K-S_te^{\left[\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma\left(W(T)-W(t)\right)\right]}\right)^+\middle|S_t\right]$$

$$=e^{-(T-t)}E\left[\left(K-S_te^{\left[\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma\left(W(T)-W(t)\right)\right]}\right)^+\middle|S_t\right]$$

$$=Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{-\ln\frac{S(t)}{K}-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$

$$-S(t)\Phi\left(\frac{-\ln\frac{S(t)}{K}-\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$

Dimana Φ adalah fungsi distribusi normal (0,1). Sebagaimana pada opsi call nilai ini sama dengan nilai melalui perhitungan dengan transformasi ke persamaan panas.

7. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab-bab terdahulu dapat diberikan simpulan bahwa jika B(t) adalah harga bond dan S(t) harga saham, dan perubahannya adalah:

$$dB(t) = rB(t)dt$$

Dimana r adalah tingkat suku bunga dan

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t)$$

Dimana:

$\mu(t) = rata - rata\ dari\ pengembalian\ saham$

$\sigma(t) = volatilitas\ dari\ harga\ saham$

$dt = periode\ waktu$

dW(t) variabel acak dengan W(t) mengikuti proses gerak Brown dengan rataan 0 dan variansi 1.

Dengan analisis penurunan niali kekayaan maupun dengan menghitung present value selisih harga pasar dengan harga saham diperoleh harga opsi call pada waktu $t \leq T$ adalah

$$f_T = S(t)\Phi\left(\frac{\ln\frac{S(t)}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$

$$-Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln\frac{S(t)}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$

Dimana Φ adalah fungsi distribusi normal (0,1)

Sedangkan harga opsi put pada waktu $t \leq T$ adalah

$$f_T = Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{-\ln\frac{S(t)}{K} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$

$$-S(t)\Phi\left(\frac{-\ln\frac{S(t)}{K} - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$

Dimana Φ adalah fungsi distribusi normal (0,1)

Daftar Pustaka

Geza Scay, 2007, Introduction to Probability with Statistical Aplication, Birkhauser, Boston

Ross, M. Sheldom , 2000 , Introduction to Models Probability, John Wiley & Sons, Inc

Ross, M. Sheldom , 1986 , Stochastics Process, John Wiley & Sons, Inc

Taylor, M. Howard and Karlin, Samuel, 1975, A Fisrt Course in Stochastics Processes, Academic Press, Inc

Zastawniak, T. and Brzezniak, Z, 2003, Basic Stochastic Processes, Springer