AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Vol. 15, No. 1 April 2024
e-ISSN 2579-7646

Sifat-Sifat Matriks Eksponensial

[1]Dearmauli saragih, [2]Fransiskus Fran, [3]Nilamsari Kusumastuti
[1,2,3]Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Tanjungpura
Email: dearmauli.saragih77@student.untan.ac.id

Abstrak

Fungsi eksponensial natural merupakan fungsi yang memuat bentuk eksponen dengan pangkat berupa variabel dan disimbolkan dengan e^x. Sedangkan pada matriks, matriks yang dianalogikan ke dalam fungsi eksponensial disebut matriks eksponensial dan disimbolkan dengan e^A, dengan A merupakan matriks berukuran $n \times n$. Fungsi tersebut didefinisikan berdasarkan bentuk ekspansi deret Maclaurin dari e^x. Dari analogi tersebut, timbul pertanyaan operasi dan sifat-sifat fungsi eksponensial natural apa saja yang dapat digeneralisasi pada matriks eksponensial. Artikel ini membahas tentang analisis dari sifat-sifat fungsi eksponensial natural yang dapat digeneralisasikan pada matriks eksponensial dan mengkaji sifat-sifat pada matriks eksponensial seperti sifat operasi, diagonal, transpos, determinan dan turunan pada matriks eksponensial. Langkah awal yang dilakukan adalah mendefinisikan matriks eksponensial, setelah itu dikaji rumusan matriks eksponensial untuk matriks diagonal dan matriks yang dapat didiagonalisasi. Selanjutnya dikaji sifat-sifat operasi yang berlaku pada matriks eksponensial dan sifat transpos, determinan dan turunannya. Sifat-sifat pada fungsi eksponensial natural yang dapat digeneralisasikan pada matriks eksponensial yaitu pangkat nol, operasi perkalian dan turunan fungsi eksponensial. Sifat operasi pembagian pada fungsi eksponensial memiliki bentuk yang berbeda pada matriks eksponensial, pada matriks eksponensial $e^{-A} \neq \frac{1}{e^A}$ karena operasi pembagian tidak berlaku pada matriks. Matriks eksponensial e^A selalu punya invers dan memiliki invers e^{-A}.

Kata kunci: *matriks diagonal; diagonalisasi; determinan*

Abstract

The natural exponential function is a function that contains an exponential form with a rank in the form of a variable and is symbolized by e^x. Whereas in matrices, the matrix which is analogous to the exponential function is called the exponential matrix and is symbolized by e^A, where A is a matrix of size $n \times n$. The function is defined based on the Maclaurin series expansion form of e^x. From this analogy, the question arises of what operations and properties of natural exponential functions can be generalized to exponential matrices. This article discusses the analysis of the properties of natural exponential functions which can be generalized to exponential matrices and examines the properties of exponential matrices such as the properties of operations, diagonals, transposes, determinants and derivatives of exponential matrices. The first step is to define the exponential matrix, after which the exponential matrix formula is studied for diagonal matrices and matrices that can be diagonalized. Next, we study the operational properties that apply to exponential matrices and the properties of transpose, determinants and their derivatives. Properties of natural exponential functions that can be generalized to exponential matrices are powers of zero, multiplication and derivatives of exponential functions. The nature of the division operation on an exponential function has a different form on an exponential matrix, on an exponential matrix $e^{-A} \neq \frac{1}{e^A}$ because the division operation does not apply to matrices. The exponential matrix e^A always has an inverse and has an inverse e^{-A}.

Keywords*: diagonal matrix; diagonalization; determinant*

A. Pendahuluan

Fungsi eksponensial merupakan salah satu pembahasan yang terdapat dalam ilmu matematika. Fungsi eksponensial merupakan suatu fungsi yang memuat bentuk eksponen dengan pangkat berupa variabel ditulis dengan notasi e^x (Thomas dkk., 2014). Salah satu konstantanya adalah konstanta e yang merupakan basis dari logaritma natural. Nilai dari e merupakan bilangan irasional yang nilainya tidak dapat dipastikan, yaitu $e = 2{,}71828\cdots$.

Dalam kehidupan sehari-hari, fungsi eksponensial dapat diterapkan salah satunya dalam bidang biologi dan ekonomi (Saputro, 2019). Sebagai contoh, dalam bidang biologi fungsi eksponensial dapat digunakan untuk menghitung jumlah perkembangan bakteri dalam waktu tertentu. Sedangkan fungsi eksponensial pada bidang ekonomi biasanya digunakan dalam menghitung bunga majemuk di perbankan. Secara umum nilai fungsi eksponensial dapat diekspansikan menggunakan deret Maclaurin dari e^x dan menghasikan deret pangkat $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (Varberg dkk., 2007). Pada matriks, fungsi eksponensial dapat diperluas menjadi matriks eksponensial.

Matriks merupakan susunan dari bilangan-bilangan yang berbentuk persegi empat (Anton & Rorres, 2004). Gagasan mengenai matriks pertama kali diperkenalkan pada tahun 1895 oleh Arthur Cayley di Inggris dalam sebuah studi sistem persamaan linear dan transformasi linear. Matriks banyak dikembangkan untuk menyelesaikan masalah matematika lainnya.

Lebih lanjut, matriks eksponensial merupakan deret pangkat dari fungsi eksponensial yang konstantanya diganti menjadi suatu matriks persegi (Edwards & Penney, 2008). Deret yang terbentuk pada matriks eksponensial sama dengan deret yang terbentuk pada fungsi eksponensial. Salah satu penggunaan matriks eksponensial yaitu untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial.

Pada artikel ini, dikaji sifat-sifat matriks eksponensial yang didasari pada sifat-sifat fungsi eksponensial dan diselidiki sifat-sifat apa saja yang berlaku pada matriks eksponensial dan berlaku pada fungsi eksponensial, yang dibatasi oleh fungsi pada bilangan real sedangkan pada matriks eksponensial adalah matriks persegi dengan entri-entri bilangan real.

B. Metode Penelitian

Metode yang digunakan pada skripsi ini adalah studi literatur, yaitu dengan membaca kajian teori yang berhubungan dengan matriks eksponensial dari beberapa buku, jurnal dan artikel, serta konsultasi pada pakar bidang terkait. Langkah awal yang dilakukan pada skripsi ini adalah mendefinisikan matriks eksponensial, setelah itu dikaji rumusan matriks eksponensial untuk matriks diagonal dan matriks yang dapat diagonalisasi. Langkah selanjutnya mengkaji operasi-operasi yang terdapat pada matriks eksponensial. Setelah itu mengkaji sifat-sifat matriks eksponensial seperti sifat transpos dan determinan.

Kemudian mengkaji turunan dari matriks eksponensial.

C. Hasil dan Pembahasan

1. Matriks Eksponensial

Matriks eksponensial terbentuk dari ekspansi deret Maclaurin untuk e^x dimana x merupakan bilangan real. Matriks eksponensial dilambangkan dengan e^A dengan A merupakan suatu matriks berukuran $n \times n$ (Bladt & Nielsen, 2017). Deret yang terbentuk pada matriks eksponensial sama dengan deret yang terbentuk pada fungsi eksponensial biasa. Berikut diberikan definisi dari matriks eksponensial.

Definisi 1 (Chorianopoulos & Guo, 2016) *Misalkan A matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entri bilangan real. Eksponensial dari A dilambangkan dengan e^Aatau $exp(A)$ adalah matriks $n \times n$ yang diberikan oleh deret pangkat:*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \cdots \tag{1}$$

dengan I merupakan suatu matriks identitas.

Deret pada Persamaan 1 selalu konvergen sehingga eksponensial dari A terdefinisi dengan baik (Salman & Borkar, 2016).

Pada saat matriks $n \times n$ berbentuk diagonal

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

maka hasil dari perkalian pangkat matriks tersebut selalu menghasilkan pola berikut

$$D^n = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {\lambda_n}^n \end{bmatrix}.$$

Oleh karena itu, ketika menghitung nilai matriks eksponensial yang digunakan matriks diagonal, maka dapat dengan mudah dihitung menggunakan Definisi 1, sedangkan untuk matriks $n \times n$ yang dapat didiagonalisasi, perhitungannya dapat dilakukan dengan rumus yang dibahas pada Lema 2 berikut.

Lema 2 (Leon, 2001) *Diberikan D suatu matriks diagonal $n \times n$ dengan*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

dan A suatu matriks $n \times n$ yang dapat didiagonalisasi dengan $A = XDX^{-1}$, untuk suatu X matriks nonsingular. Matriks eksponensial dari D dan A adalah

1. $e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$

2. $e^A = Xe^DX^{-1}$

Bukti

1. Akan dibuktikan bahwa $e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
e^D &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} {\lambda_1}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} {\lambda_2}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} {\lambda_n}^k \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$.

2. Jika A dapat didiagonalisasi maka $A = XDX^{-1}$ dan $A^k = XD^kX^{-1}$ (Leon, 2001).

   Akan dibuktikan bahwa $e^A = Xe^DX^{-1}$, maka

$$
\begin{aligned}
e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (XDX^{-1})^k \\
&= X\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k\right) X^{-1} \\
&= Xe^DX^{-1}
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $e^A = Xe^DX^{-1}$ ■.

2. Sifat-sifat Matriks Eksponensial

Pada sifat-sifat matriks eksponensial terdapat sifat-sifat yang sama dengan fungsi eksponensial natural dan sifat dari operasi matriks. Sebelum dibahas mengenai sifat-sifat pada matriks eksponensial, diberikan definisi mengenai deret pangkat matriks eksponensial.

Definisi 3 (Edwards & Penney, 2008) *Jika t merupakan skalar dan A merupakan matriks $n \times n$, maka deret pangkat dari matriks eksponensial adalah*

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots \tag{2}$$

Contoh 4 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

maka $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matriks A merupakan matriks nilpoten karena A^3 menghasilkan matriks nol atau $A^n = 0$ untuk $n \geq 3$. Selanjutnya substitusikan pada Persamaan (2)

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} A^k t^k \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{18}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3t & 4t + 9t^2 \\ 0 & 1 & 6t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare \end{aligned}$$

Selanjutnya diberikan operasi-operasi dan sifat transpos pada matriks eksponensial.

Teorema 5 (Salman & Borkar, 2016) *Misalkan A merupakan suatu matriks $n \times n$ dan s, t merupakan skalar, maka sifat-sifat berikut berlaku:*

a. *Jika $\mathbf{0}$ merupakan matriks nol, maka $e^{\mathbf{0}} = I$, matriks identitas.*

b. $A^m e^A = e^A A^m$, *dengan $m \in Z$, ketika $m < 0$ maka A harus memiliki invers.*

c. $e^{(A^T)} = (e^A)^T$

d. $e^{A(s+t)} = e^{As} e^{At}$

Bukti

a. Akan dibuktikan bahwa: $e^{\mathbf{0}} = I$

Jika $A = \mathbf{0}$ maka $A^k = \mathbf{0}, k > 0$ sehingga

$$
\begin{aligned}
e^{\mathbf{0}} &= I + \mathbf{0} + \frac{1}{2!}\mathbf{0}^2 + \cdots \\
&= I
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $e^{\mathbf{0}} = I$, dengan I merupakan matriks identitas.

b. Akan dibuktikan bahwa: $A^m e^A = e^A A^m$

$$
\begin{aligned}
A^m e^A &= A^m\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k A^m\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k\right)A^m \\
&= e^A A^m
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $A^m e^A = e^A A^m$.

c. Akan dibuktikan bahwa: $e^{(A^T)} = (e^A)^T$

$$
\begin{aligned}
e^{A^T} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(A^T)^k \\
&= I + A^T + \frac{1}{2!}(A^T)^2 + \cdots \\
&= I + A^T + \frac{1}{2!}(A^2)^T + \cdots \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k\right)^T \\
&= (e^A)^T
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $e^{A^T} = (e^A)^T$.

Jika A merupakan matriks simetri, maka $A = A^T$(Andari, 2017). Sehingga $e^{A^T} = (e^A)^T = e^A$ simetri.

d. Akan dibuktikan bahwa: $e^{A(s+t)} = e^{As}e^{At}$

$$
\begin{aligned}
e^{As}e^{At} &= \left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}A^j s^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{j!\,k!}A^{j+k}s^j t^k \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}A^l(s+t)^l \\
&= e^{A(s+t)}
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $e^{As}e^{At} = e^{A(s+t)}$. ■

Misalkan $s = 1$ dan $t = -1$, maka diperoleh

$$e^{A}e^{-A} = e^{A\left(1+(-1)\right)} = e^{0} = I$$

dengan kata lain terlepas dari matriks A, matriks eksponensial e^{A} selalu punya invers dan memiliki invers e^{-A}.

Secara umum sifat-sifat pada fungsi eksponensial tidak dapat digeneralisasi pada matriks eksponensial karena sifat perkalian matriks yang tidak komutatif, akan tetapi untuk kasus khusus $AB = BA$ sifat-sifatnya dapat digeneralisasi. Ketika perkalian matriks $AB = BA$ maka atribut-atribut pada teorema berikut dapat digunakan untuk membantu menghitung suatu matriks eksponensial.

Teorema 6 (Salman & Borkar, 2016) *Misalkan A dan B merupakan suatu matriks $n \times n$ dan t merupakan skalar. Jika $AB = BA$ maka sifat-sifat berikut berlaku:*

a. $Ae^{B} = e^{B}A$

b. $e^{A}e^{B} = e^{(A+B)}$

c. $e^{A}e^{B} = e^{B}e^{A}$

d. $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$

Bukti

a. Akan dibuktikan bahwa: $Ae^{B} = e^{B}A$

$$\begin{aligned} Ae^{B} &= A\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}B^{k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}AB^{k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}B^{k}A \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}B^{k}\right)A \\ &= e^{B}A \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $Ae^{B} = e^{B}A$.

b. Akan dibuktikan bahwa: $e^{A}e^{B} = e^{(A+B)}$

$$e^{A}e^{B} = \left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}A^{j}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}B^{k}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{j!\,k!} A^j B^k$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!\,(j-k)!} A^k B^{j-k}$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (A+B)^l$$
$$= e^{A+B}$$

Jadi terbukti bahwa $e^A e^B = e^{(A+B)}$.

c. Akan dibuktikan bahwa: $e^A e^B = e^B e^A$

$$\begin{aligned} e^A e^B &= e^{A+B} \\ &= e^{B+A} \\ &= e^B e^A \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $e^A e^B = e^B e^A$.

d. Akan dibuktikan bahwa: $e^{At} e^{Bt} = e^{(A+B)t}$

$$\begin{aligned} e^{At} e^{Bt} &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j t^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k t^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{j!\,k!} (At)^j (Bt)^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!\,(j-k)!} (At)^k (Bt)^{j-k} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (A+B)^l t^l \\ &= e^{(A+B)t} \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $e^{At} e^{Bt} = e^{(A+B)t}$. ■

Selanjutnya diberikan sifat determinan dari suatu matriks eksponensial pada teorema berikut.

Teorema 7 (Smalls, 2007) *Jika D merupakan matriks diagonal dan A suatu matriks persegi yang dapat didiagonalisasi.*

a. $det(e^D) = e^{tr(D)}$

b. $det(e^A) = e^{tr(A)}$

Bukti.

a. Akan dibuktikan bahwa: $det\ det\ (e^D) = e^{tr(D)}$

Karena D merupakan matriks diagonal maka

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} det\,(e^D) &= det\left(e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}} \right) \\ &= det\left(\begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} \right) \\ &= e^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \\ &= e^{tr(D)} \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $det\,(e^D) = e^{tr(D)}$.

b. Akan dibuktikan bahwa: $det(e^A) = e^{tr(A)}$ (3)

Karena A merupakan suatu matriks persegi yang dapat didiagonalisasikan $A = XDX^{-1}$ maka $e^A = Xe^DX^{-1}$

Determinannya dapat dijabarkan menjadi

$$\begin{aligned} det(e^A) &= det(X)\,det(e^D)\,det(X^{-1}) \\ &= det(e^D) \\ &= e^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k} \end{aligned} \tag{4}$$

Ruas kanan Persamaan (3) dapat dijabarkan menjadi

$$\begin{aligned} e^{tr(A)} &= e^{tr(XDX^{-1})} \\ &= e^{tr(D)} \\ &= e^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k} \end{aligned} \tag{5}$$

Karena hasil penjabaran Persamaan (4) sama dengan Persamaan (5) maka dapat disimpulkan bahwa $det\,det\,(e^A) = e^{tr(A)}$.■

Berikut diberikan teorema yang membahas mengenai turunan dari matriks eksponensial serta pembuktian dari teorema tersebut.

Teorema 8 (Edwards & Penney, 2008) *Jika A merupakan matriks persegi dan t skalar, maka* $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{tA}$.

Bukti.

Akan dibuktikan bahwa: $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$

AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Vol. 14, No. 1 April 2024
e-ISSN 2579-7646

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e^{At}) &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}A^k t^{k-1} \\
&= A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}A^{k-1}t^{k-1}
\end{aligned} \tag{6}
$$

Jika $l = k - 1$, maka $k = l + 1$. Dari Persamaan (6) diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(e^{At}) &= A\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}A^l t^l \\
&= Ae^{At}
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$. ■

D. Simpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan pada bab sebelumnya maka diperoleh kesimpulan yaitu sebagai berikut.

1. Sifat-sifat pada fungsi eksponensial yang dapat digeneralisasi pada matriks eksponensial yaitu

Tabel 1 Sifat-sifat fungsi eksponensial yang dapat digeneralisasi pada matriks eksponensial

	Sifat-sifat pada fungsi eksponensial	Sifat-sifat pada matriks eksponensial
a.	$e^0 = 1$	$e^0 = I$ dengan 0 merupakan matriks nol dan I merupakan matriks identitas.
b.	$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$	Jika A merupakan matriks $n \times n$ maka, $e^{-A} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-A)^k = I - A + \frac{1}{2!}A^2 - \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$
c.	$e^x e^y = e^{x+y}$	Jika A dan B merupakan matriks $n \times n$ dan $AB = BA$ maka berlaku, $e^A e^B = e^{A+B}$
d.	$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$	Jika A dan B merupakan matriks $n \times n$ dan $AB = BA$ maka berlaku, $e^A e^{-B} = e^{A-B}$
e.	$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$	$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$ dengan t merupakan skalar.

Pada fungsi eksponensial terdapat sifat yang memiliki bentuk berbeda dari matriks eksponensial yaitu operasi pembagian. Pada matriks eksponensial $e^{-A} \neq \frac{1}{e^A}$ karena operasi pembagian tidak berlaku pada matriks. Akan tetapi matriks eksponensial e^A selalu punya invers dan memiliki invers e^{-A}.

2. Sifat-sifat yang terdapat pada matriks eksponensial yaitu sebagai berikut.

Jika A dan B merupakan matriks $n \times n$ dan s dan t merupakan skalar maka berlaku

a. Sifat diagonal pada matriks eksponensial. Jika D matriks diagonal dan A matriks yang dapat didiagonalisasi maka,

   i. $e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$

   ii. $e^A = Xe^D X^{-1}$

   dengan X *nonsingular*.

b. $A^m e^A = e^A A^m$, untuk setiap $m \in Z$ dan A mempunyai invers

c. Jika $AB = BA$, maka berlaku

   i. $Ae^B = e^B A$

   ii. $e^A e^B = e^B e^A$

   iii. $e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt}$, untuk setiap t merupakan skalar.

d. $e^{(A^T)} = (e^A)^T$

e. Determinan pada matriks eksponensial yaitu,

   i. $det\, det\, (e^D) = e^{tr(D)}$

   ii. $det\, det\, (e^A) = e^{tr(A)}$

E. Daftar Pustaka

Andari, A. (2017). Aljabar Linear Elementer. Malang: Universitas Brawijaya Press.

Anton, H., & Rorres, C. (2004). Aljabar Linear Elementer. Jakarta: Erlangga.

Bladt, M., & Nielsen, B. F. (2017). *Matrix-Exponential Distributions in Applied Probability*. New York: Springer.

Chorianopoulos, C., & Guo, C. (2016). Numerical Range for The Matrix Exponential Function. *Electronic Journal of Linear Algebra,* 31, 633-645.

Edwards, C. H., & Penney, D. E. (2008). Elementary Differential Equations, Sixth Edition. New Jersey: Pearson Education, Inc.

Leon, S. J. (2001). Aljabar Linier dan Aplikasinya, Edisi Kelima. Jakarta: Erlangga.

Salman, M. A., & Borkar, V. C. (2016). Exponential Matrix and Their Properties. International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR), 4, 53-63.

Saputro, A. P. (2019). Matematika Untuk Kehidupan: Fungsi Eksponensial. Yogyakarta: Deepublish.

Smalls, N. N. (2007). The Exponential Function of Matrices. Georgia: Georgia State University.

Thomas, G. B., Weir. M. D., Hass, J., & Heil. C. (2014). *Kalkulus Edisi Ketiga Belas*. Jakarta: Erlangga.

Varberg, D., Purcell, E. J., & Rigdon, S. E. (2007). Kalkulus Edisi Kesembilan. Jakarta: Erlangga.