AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Vol. 13, No. 3 Desember 2022
e-ISSN 2579-7646

Evaluasi dari metode: trapesium, simpson 1/3, simpson 3/8 dan newton cotes orde 4-10 untuk menghitung integral tertentu secara numerik

Mulyono, Muhammad Eka Suryana, Chiko T. Siswoyo, Andri Rahmanto

Program Studi Ilmu Komputer FMIPA UNJ, Jln. Rawamangun Muka, Jakarta 13220
email korespondensi: mulyono@unj.ac.id

Abstrak

Integral tertentu adalah integral yang menangani perhitungan integral diantara batas-batas integral yang telah ditentukan. Penelitian ini bertujuan untuk mengevaluasi dan membandingkan sejumlah metode untuk menghitung integral-integral tertentu secara numerik, khususnya untuk fungsi-fungsi yang cukup rumit maupun fungsi yang ditabulasikan yaitu fungsi f(x) yang tidak diketahui secara eksplisit. Metode yang dimaksud diantaranya adalah metode Trapesium, metode Simpson 1/3, metode Simpson 3/8, dan metode Newton-Cotes orde 4 sampai dengan 10. Faktor utama sebagai pertimbangan dalam membandingkan metode-metode tersebut di atas adalah akurasi penyelesaian numerik. Penelitian ini memberikan hasil bahwa untuk soal integral yang dapat dihitung secara analitik, maka hasil perhitungan dengan metode Newton-Cotes orde 6 dan dengan banyak partisi 12 (n=12) besar kesalahannya adalah 0,000026% sementara dengan metode Newton-Cotes orde 6 dan dengan n=30 diperoleh besar kesalahan 0,00000002 % sedangkan dengan metode Newton-Cotes orde 10 dan menggunakan n=30, maka besar kesalahannya adalah 0,00000000 %, sehingga bisa disimpulkan bahwa metode integral numerik yang terbaik adalah metode Newton-Cotes Orde Tertinggi yang bisa digunakan, karena kesalahannya paling kecil.

Kata unci: *Metode Trapesium; Metode Simpson 1/3 dan 3/8; Metode Newton-Cotes orde 4-10.*

Absract

Certain integrals are integrals that handle integral computations between predetermined integral boundaries. This study aims to evaluate and compare several methods to calculate certain integrals numerically, especially for quite complex and tabulated functions, namely the function f(x), which is not explicitly known. The methods in question include the Trapezoidal method, the Simpson 1/3 method, the Simpson 3/8 method, and the Newton-Cotes method of orders 4 to 10. The main factor in comparing the methods mentioned above is the accuracy of the numerical solution. This study shows that for integral problems that can be calculated analytically, the results of calculations using the Newton-Cotes method of order 6 and with many partitions of 12 (n = 12), the error is 0.0000026%. In contrast, with the Newton-Cotes method of order 6 and with n = 30, the error is 0.000000002 %, while with the Newton-Cotes method of order 10 and using n = 30, the error is 0.00000000 %, so that it can be concluded that the best numerical integral method is the highest order Newton-Cotes method that can be used, because the error is the smallest.

Keywords: *Trapezoidal method; Simpson 1/3 and 3/8 method; Newton-Cotes method of order 4-10*

A. Pendahuluan

Integral tertentu menangani perhitungan integral diantara batas-batas integral yang telah ditentukan, yang biasanya dinyatakan sebagai berikut : $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = F(x)|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$.

Secara Geometri, nilai dari integral tertentu $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$ sama dengan luas daerah yang dibatasi oleh kurva y = f(x), garis x = a dan garis x = b.

Fungsi-fungsi yang dapat diintegralkan adalah fungsi kontinu yang sederhana maupun fungsi kontinu yang cukup rumit, misalnya menghitung integral berikut ini : $\int_{x=1}^{x=4} \frac{5+\cos(3+x^{0,5})}{\sqrt{3+0,5\sin^7 x}} e^{0,5x^3} dx$. Untuk integral dari fungsi yang cukup rumit seperti ini, jelas sulit untuk diselesaikan dengan metode-metode integrasi yang sederhana, dan hanya bisa dihitung dengan metode numerik (Conte & Boor, 1992; Munir, 2013).

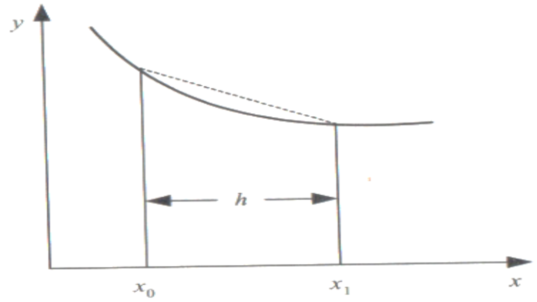
Demikian pula untuk fungsi yang ditabulasikan, yaitu fungsi yang nilai dari x dan f(x) pasangannya diberikan pada sejumlah titik diskrit dan pada umumnya fungsi f(x) tidak diketahui secara eksplisit, fungsi seperti ini sering dijumpai pada data hasil eksperimen di laboratorium atau berupa data pengamatan di lapangan. Untuk menghitung integral dari fungsi yang ditabulasikan seperti ini harus dikerjakan secara numerik (Otto & Denier, 2005; Karris, 2007).

Untuk menghitung integral tertentu dari $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$ ada banyak metode, yang pada artikel ini akan digunakan metode Trapesium, metode Simpson 1/3 atau metode Newton-Cotes Orde 2, metode Simpson 3/8 atau metode Newton-Cotes orde 3, dan metode Newton-Cotes orde 4, 5, 6, 7, 8, 9 dan 10.

Berikut ini adalah sejumlah metode integral numerik yang akan digunakan dan dibandingkan hasilnya (Chapra & Canale, 1991; Triatmodjo, 1992; Munir, 2013; Yang dkk, 2020):

1. Metode Trapesium

Perhatikan Gambar 1 berikut ini :



Gambar 1. Pias yang berbentuk trapesium

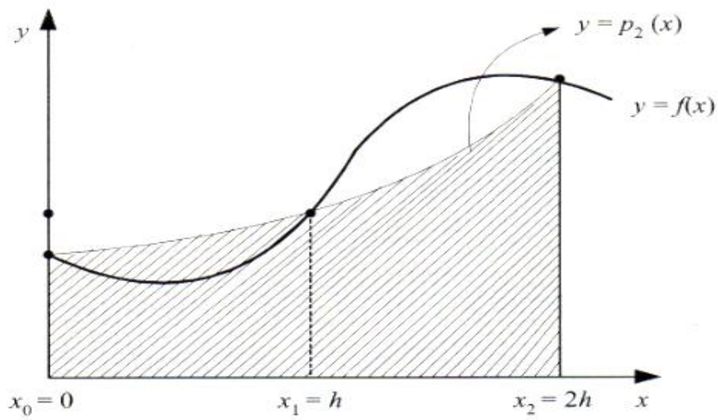
Gambar 1 di atas adalah sebuah pias berbentuk trapesium dari x = x_0 dan x = x_1. Luas satu pias tersebut adalah $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx =$

$\frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_1)\right)$, yang disebut metode trapesium. Bila suatu luasan pada interval [a, b] dibagi menjadi n pias, maka metode integrasi yang diperoleh adalah Metode Trapesium Gabungan sebagai berikut:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots. + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)] = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)] \quad (1)$$

2. Metode Simpson 1/3

Hampiran nilai integral yang lebih baik dapat ditingkatkan menggunakan polinom interpolasi derajat yang lebih tinggi, misalkan fungsi f(x) dihampiri dengan polinom interpolasi derajat 2 yang grafiknya berbentuk parabola. Luas daerah yang dihitung sebagai hampiran nilai integral adalah daerah di bawah parabola seperti Gambar 2 berikut ini :



Gambar 2. Daerah di bawah y=f(x) yang dipartisi menjadi 2 pias

Polinom interpolasi Newton-Gregory derajat 2 yang melalui 3 titik seperti gambar di atas adalah :

$$p_2(x) = f(x_0) + \frac{x}{h}\Delta f(x_0) + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\Delta^2 f(x_0) = f_0 + \frac{x}{h}\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\Delta^2 f_0.$$

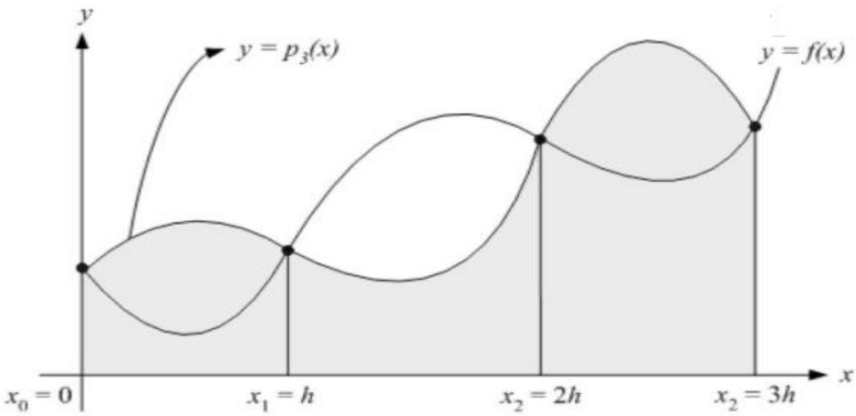
$p_2(x) = f_0 + \frac{x}{h}\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\Delta^2 f_0$ diintegralkan didalam interval [0, 2h] sebagai berikut :

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx \approx \int_0^{2h} p_2(x)\,dx \approx \int_0^{2h}\left(f_0 + \frac{x}{h}\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\Delta^2 f_0\right)dx \approx f_0 x + \frac{x^2}{2h}\Delta f_0 + \left(\frac{x^3}{6h^2} - \frac{x^2}{4h}\right)\Delta^2 f_0 \Big|_{x=0}^{x=2h} \approx 2hf_0 + 2h\Delta f_0 + \left(\frac{4h}{3} - h\right)\Delta^2 f_0 \approx 2hf_0 + 2h\Delta f_0 + \frac{h}{3}\Delta^2 f_0.$$

$\Delta f_0 = f_1 - f_0$ dan $\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = f_2 - f_1 - (f_1 - f_0) = f_2 - 2f_1 + f_0$

Sehingga :
$\int_0^{2h} p_2(x)\,dx \approx 2hf_0 + 2h\Delta f_0 + \frac{h}{3}\Delta^2 f_0 \approx 2hf_0 + 2h(f_1 - f_0) + \frac{h}{3}(f_2 - 2f_1 + f_0) \approx \frac{h}{3} f_0 + \frac{4h}{3} f_1 + \frac{h}{3} f_2 \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$ dan
$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3}(f_2 + 4f_3 + f_4) + \cdots + \frac{h}{3}(f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$ (2)

3. Metode Simpson 3/8



Gambar 3. Daerah di bawah y=f(x) yang dipartisi menjadi 3 pias

Pada metode Simpson 3/8, fungsi y=f(x) dihampiri dengan polinom interpolasi berderajat 3. Untuk membuat polinom interpolasi derajat 3, dibutuhkan 4 buah titik, misalkan titik-titik : (0, f(0)), (h, f(h)), (2h, f(2h)), (3h, f(3h)). Luas daerah yang dihitung sebagai hampiran nilai integrasi adalah daerah di bawah kurva polinom derajat 3 (parabola) tersebut.

Polinom interpolasi Newton-Gregory derajat 3 yang melalui 4 titik seperti Gambar 3 di atas adalah :

$$p_3(x) = f(x_0) + \frac{x}{h}\Delta f(x_0) + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\Delta^2 f(x_0) + \frac{x(x-h)(x-2h)}{3!h^3}\Delta^3 f(x_0)$$
$$= f_0 + \frac{x}{h}\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\Delta^2 f_0 + \frac{x(x-h)(x-2h)}{3!h^3}\Delta^3 f_0 .$$

$p_3(x) = f_0 + \frac{x}{h}\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\Delta^2 f_0 + \frac{x(x-h)(x-2h)}{3!h^3}\Delta^3 f_0$ diintegralkan didalam interval [0, 3h] sebagai berikut :

$\int_0^{3h} f(x)\,dx \approx \int_0^{3h} p_3(x)\,dx \approx \int_0^{3h}\left(f_0 + \frac{x}{h}\Delta f_0 + \frac{x(x-h)}{2!h^2}\Delta^2 f_0 + \frac{x(x-h)(x-2h)}{3!h^3}\Delta^3 f_0\right)dx \approx \int_0^{3h}\left(f_0 + \frac{x}{h}\Delta f_0 + \left(\frac{x^2}{2h^2} - \frac{x}{2h}\right)\Delta^2 f_0 + \left(\frac{x^3}{6h^3} - \frac{x^2}{2h^2} + \frac{x}{3h}\right)\Delta^3 f_0\right)dx \approx \left(f_0 x + \frac{x^2}{2h}\Delta f_0 + \left(\frac{x^3}{6h^2} - \frac{x^2}{4h}\right)\Delta^2 f_0 + \left(\frac{x^4}{24h^3} - \frac{x^3}{6h^2} + \frac{x^2}{6h}\right)\Delta^3 f_0\right)\Big|_{x=0}^{x=3h} \approx 3hf_0 + \frac{9}{2}h\Delta f_0 + \left(\frac{9h}{2} - \frac{9h}{4}\right)\Delta^2 f_0 + \left(\frac{27h}{8} - \frac{9h}{2} + \frac{3h}{2}\right)\Delta^3 f_0 \approx 3hf_0 + \frac{9}{2}h\Delta f_0 + \frac{9}{4}h\Delta^2 f_0 + \frac{3}{8}h\Delta^3 f_0$

$\Delta f_0 = f_1 - f_0$, $\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0 = f_2 - f_1 - (f_1 - f_0) = f_2 - 2f_1 + f_0$
$\Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1 = f_3 - f_2 - (f_2 - f_1) = f_3 - 2f_2 + f_1$, $\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0 = f_3 - 2f_2 + f_1 - (f_2 - 2f_1 + f_0) = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0$

Sehingga :

$\int_0^{3h} p_3(x)\,dx \approx 3hf_0 + \frac{9}{2}h\Delta f_0 + \frac{9}{4}h\Delta^2 f_0 + \frac{3}{8}h\Delta^3 f_0 \approx 3hf_0 + \frac{9}{2}h(f_1 - f_0) + \frac{9}{4}h(f_2 - 2f_1 + f_0) + \frac{3}{8}h(f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0) \approx \left(3h - \frac{9}{2}h + \frac{9}{4}h - \frac{3}{8}h\right) f_0 + \left(\frac{9}{2}h - \frac{9}{2}h + \frac{9}{8}h\right) f_1 + \left(\frac{9}{4}h - \frac{9}{8}h\right) f_2 + \frac{3}{8}hf_3 \approx \frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$

Sehingga metode Simpson 3/8 gabungan adalah :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 2f_6 + 3f_7 + 3f_8 + 2f_9 + \cdots + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n) \quad (3)$$

4. Metode Newton-Cotes

Metode Simpson 1/3 dan Metode Simpson 3/8 adalah dua metode integrasi numerik dari Metode Newton-Cotes, yang mana metode Simpson 1/3 menghampiri fungsi f(x) dengan polinom interpolasi derajat 2 dan metode Simpson 3/8 menghampiri fungsi f(x) dengan polinom interpolasi derajat 3. Bentuk umum metode Newton-Cotes orde n dapat ditulis sebagai berikut :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \alpha h[w_0 f_0 + w_1 f_1 + w_2 f_2 + \cdots + w_n f_n] \quad (4)$$

dengan: $f_j = f(x_j)$, $x_j = a + jh$ dan $h = \frac{b-a}{n}$, sedangkan α dan w_i adalah konstanta riil seperti pada Tabel 1 berikut ini (Munir, 2013; Klusalaas, 2005):

Tabel 1. Nilai Orde (n) dan Konstanta Riil dari Metode Newton-Cotes

n	α	w_i
1	$\frac{1}{2}$	1 1
2	$\frac{1}{3}$	1 4 1
3	$\frac{3}{8}$	1 3 3 1
4	$\frac{2}{45}$	7 32 12 32 7
5	$\frac{5}{288}$	19 75 50 50 75 19
6	$\frac{1}{140}$	41 216 27 272 27 216 41
7	$\frac{7}{17280}$	751 3577 1323 2989 2989 1323 3577 751
8	$\frac{8}{14175}$	989 5888 -928 10496 -4540 10496 -928 58888 989
9	$\frac{9}{89600}$	2857 15741 1080 19344 5788 5788 19344 1080 15741 2857
10	$\frac{5}{299376}$	16067 106300 -48525 272400 -260550 427368 -260550 272400 -48525 106300 16067

AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Vol. 13, No. 3 Desember 2022
e-ISSN 2579-7646

B. Metode Penelitian

Pelaksanaan penelitian ini dilakukan dengan tahapan-tahapan sebagai berikut:

a. Menyiapkan sejumlah fungsi f(x) yang akan diintegralkan dengan batas integral tertentu, yang akan diintegralkan dengan menggunakan metode-metode yang akan diteliti yaitu metode: Trapesium, Simpson 1/3, Simpson 3/8 dan Metode Newton-Cotes Orde 4, 5, 6, 7, 8, 9 dan 10.
b. Mengimplementasi metode-metode yang akan dikaji, yaitu metode: Trapesium, Simpson 1/3, Simpson 3/8 dan Metode Newton-Cotes Orde 4-10.
c. Melakukan eksperimen terhadap metode-metode tersebut yaitu dengan cara menghitung integral dari fungsi dan batas integral yang sama dengan metode-metode tersebut.
d. Melakukan evaluasi terhadap hasil-hasil uji coba yang dilakukan, yaitu dengan cara membandingkan hasil integral yang didapat dari metode-metode yang digunakan. Parameter yang digunakan untuk melakukan evaluasi kinerja dari metode-metode tersebut adalah akurasi penyelesaian numerik.

C. Hasil dan Pembahasan

Pada penelitian ini diberikan sejumlah soal integral tertentu yang bisa diselesaikan secara analitik maupun soal integral tertentu yang cukup rumit ataupun berupa fungsi yang ditabulasikan, yaitu nilai dari x dan f(x) pasangannya diberikan pada sejumlah titik diskrit dan pada umumnya fungsi f(x) tidak diketahui secara eksplisit yang tidak mungkin bisa diselesaikan secara analitik.

Berikut ini soal-soalnya:

1. Hitunglah $\int_2^5 e^{0,1x^2}\, x\, dx$ secara :
   a. Analitik
   b. Numerik, yaitu dengan menggunakan metode : Trapesium, Simpson $\frac{1}{3}$, Simpson $\frac{3}{8}$ dan Newton-Cotes Orde 4-10 yang menggunakan jarak antar titik (h) = 0,25.
   c. Numerik, yaitu dengan menggunakan metode : Trapesium, Simpson $\frac{1}{3}$, Simpson $\frac{3}{8}$ dan Newton-Cotes Orde 4-10 yang menggunakan jarak antar titik (h) = 0,1.
2. Hitunglah $\int_3^6 e^{\sqrt{0,2x}}\, x^{2/3}(5x-3)dx$ secara numerik, yaitu dengan menggunakan metode : Trapesium, Simpson $\frac{1}{3}$, Simpson $\frac{3}{8}$ dan Newton-Cotes Orde 4-10 yang menggunakan banyak pias (n) = 12 dan 30.
3. Diberikan tabel data dalam Tabel 2 sebagai berikut:

Tabel 2. Nilai x_i dan $f(x_i)$ dari Fungsi f(x)

i	x_i	$f(x_i)$	i	x_i	$f(x_i)$
0	0,5	1,616300	7	1,2	12,638417
1	0,6	2,263429	8	1,3	16,391669
2	0,7	3,103386	9	1,4	21,165112
3	0,8	4,189755	10	1,5	27,223997
4	0,9	5,590002	11	1,6	34,900555
5	1,0	7,389056	12	1,7	44,610586
6	1,1	9,693762	13	-	-

Hitunglah integral tertentu $\int_{0,5}^{1,7} f(x)dx$ secara numerik, yaitu dengan menggunakan metode : Trapesium, Simpson $\frac{1}{3}$, Simpson $\frac{3}{8}$ dan Newton-Cotes Orde 4-10 yang datanya diberikan pada tabel di atas.
Untuk jawaban dari soal-soal di atas adalah sebagai berikut :
Jawaban soal nomor 1:

a. Jawaban secara analitik dari $\int_2^5 e^{0,1x^2} xdx$ adalah:

$$\int e^{0,1x^2} x\, dx = \int e^u\, 5\, du = 5e^u + C = 5\, e^{0,1x^2} + C$$

$$\int_2^5 e^{0,1x^2}\, x\, dx = 5\, e^{0,1x^2}\Big|_2^5 = 5\, e^{2,5} - 5\, e^{0,4} = 53,45334632$$

b. Jawaban secara numerik dari $\int_2^5 e^{0,1x^2}\, x\, dx$, dengan menggunakan h=0,25 (nilai n=12) adalah :

<u>Metode Trapesium</u>:

Dengan menggunakan metode Trapesium, maka:

$\int_2^5 e^{0,1x^2} xdx = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + 2f_8 + 2f_9 + 2f_{10} + 2f_{11} + f_{12})$.

Dari hasil hitungan, diperoleh data dalam Tabel 3 sebagai berikut :

Tabel 3. Nilai x_i dan $f(x_i)$ dari Fungsi $f(x) = xe^{0,1x^2}$ dengan h = 0,25.

i	x_i	$f_i = f(x_i)$	i	x_i	$f_i = f(x_i)$
0	2	2,98364940	7	3,75	15,30234126
1	2,25	3,73288061	8	4	19,81212970
2	2,50	4,67061489	9	4,25	25,87219870
3	2,75	5,85824993	10	4,50	34,09249925
4	3	7,37880933	11	4,75	45,34929443
5	3,25	9,34559394	12	5	60,91246980
6	3,50	11,91458129	13	-	-

Jadi $\int_2^5 e^{0,1x^2}\, x\, dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + 2f_8 + 2f_9 + 2f_{10} + 2f_{11} + f_{12}) = 53,81931323$

Kesalahan = $\frac{|53,45334632-53,81931323|}{53,45334632} = 0,0068 = 0,68\ \%$

<u>Metode Simpson $\frac{1}{3}$</u>:

Dengan menggunakan metode Simpson $\frac{1}{3}$ dan data dari Tabel 3, maka:

$\int_2^5 e^{0,1x^2}\, xdx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + 4f_7 + 2f_8 + 4f_9 + 2f_{10} + 4f_{11} + f_{12}) = 53{,}45630196$

Kesalahan $= \frac{|53{,}45334632 - 53{,}45630196|}{53{,}45334632} = 0{,}000055 = 0{,}0055\ \%$

<u>Metode Simpson $\frac{3}{8}$:</u>

Dengan menggunakan metode Simpson $\frac{3}{8}$ dan data dari Tabel 3, maka: $\int_2^5 e^{0,1x^2}\, x\,dx = \frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 2f_6 + 3f_7 + 3f_8 + 2f_9 + 3f_{10} + 3f_{11} + f_{12}) = 53{,}45987524.$

Kesalahan $= \frac{|53{,}45334632 - 53{,}45987524|}{53{,}45334632} = 0{,}000122 = 0{,}012\ \%$

<u>Metode Newton-Cotes Orde 4:</u>

Dengan menggunakan metode Newton-Cotes orde 4 dan data dari Tabel 3, maka: $\int_2^5 e^{0,1x^2}\, x\,dx = \alpha h[w_0 f_0 + w_1 f_1 + w_2 f_2 + \cdots + w_n f_n] = \frac{2}{45} * 0{,}25[7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 14f_4 + 32f_5 + 12f_6 + 32f_7 + 14f_8 + 32f_9 + 12f_{10} + 32f_{11} + 7f_{12}] = 53{,}45351344.$

Kesalahan $= \frac{|53{,}45334632 - 53{,}45351344|}{53{,}45334632} = 0{,}0000031 = 0{,}0003\ \%$

<u>Metode Newton-Cotes Orde 6:</u>

Dengan menggunakan metode Newton-Cotes orde 6 dan data dari Tabel 3, maka: $\int_2^5 e^{0,1x^2}\, x\,dx = \frac{1}{140} * 0{,}25[41f_0 + 216f_1 + 27f_2 + 272f_3 + 27f_4 + 216f_5 + 82f_6 + 216f_7 + 27f_8 + 272f_9 + 27f_{10} + 216f_{11} + 41f_{12}] = 53{,}45336040.$

Kesalahan $= \frac{|53{,}45334632 - 53{,}45336040|}{53{,}45334632} = 0{,}00000026 = 0{,}000026\ \%$

c. Jawaban secara numerik dari $\int_2^5 e^{0,1x^2}\, x\,dx$, dengan $h = 0{,}1$ adalah :

<u>Metode Trapesium</u>:

Dengan menggunakan metode Trapesium, maka:

$\int_2^5 e^{0,1x^2}\, xdx = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + 2f_8 + 2f_9 + 2f_{10} + 2f_{11} + 2f_{12} + 2f_{13} + 2f_{14} + 2f_{15} + 2f_{16} + 2f_{17} + 2f_{18} + 2f_{19} + 2f_{20} + 2f_{21} + 2f_{22} + 2f_{23} + 2f_{24} + 2f_{25} + 2f_{26} + 2f_{27} + 2f_{28} + 2f_{29} + f_{30}).$

Dari hasil hitungan, diperoleh data dalam Tabel 4 sebagai berikut :

Tabel 4. Nilai x_i dan $f(x_i)$ dari Fungsi $f(x) = xe^{0,1x^2}$ dengan $h = 0{,}1$

i	x_i	$f_i = f(x_i)$	i	x_i	$f_i = f(x_i)$	i	x_i	$f_i = f(x_i)$
0	2,0	2,98364940	11	3,1	8,10435938	22	4,2	24,51008156
1	2,1	3,26394747	12	3,2	8,90979123	23	4,3	27,31989039
2	2,2	3,56961362	13	3,3	9,80529424	24	4,4	30,49627488
3	2,3	3,90363872	14	3,4	10,80247670	25	4,5	34,09249925
4	2,4	4,26938051	15	3,5	11,91458129	26	4,6	38,17024569
5	2,5	4,67061489	16	3,6	13,15673567	27	4,7	42,80104460
6	2,6	5,11159478	17	3,7	14,54624405	28	4,8	48,06796361
7	2,7	5,59711772	18	3,8	16,10292716	29	4,9	54,06760485
8	2,8	6,13260376	19	3,9	17,84951886	30	5,0	60,91246980
9	2,9	6,72418506	20	4,0	19,81212970	-	-	-
10	3,0	7,37880933	21	4,1	22,02078926	-	-	-

Jadi $\int_2^5 e^{0,1x^2}\, x\, dx = \frac{0,1}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + 2f_8 + 2f_9 + 2f_{10} + 2f_{11} + 2f_{12} + 2f_{13} + 2f_{14} + 2f_{15} + 2f_{16} + 2f_{17} + 2f_{18} + 2f_{19} + 2f_{20} + 2f_{21} + 2f_{22} + 2f_{23} + 2f_{24} + 2f_{25} + 2f_{26} + 2f_{27} + 2f_{28} + 2f_{29} + f_{30}) = 53,51200178$

Kesalahan $= \frac{|53,45334632 - 53,51200178|}{53,45334632} = 0,00110 = 0,11\ \%$

<u>Metode Simpson $\frac{1}{3}$</u>:

Dengan menggunakan metode Simpson $\frac{1}{3}$ dan data dari tabel 4, maka:

$\int_2^5 e^{0,1x^2}\, xdx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + 4f_7 + 2f_8 + 4f_9 + 2f_{10} + 4f_{11} + 2f_{12} + 4f_{13} + 2f_{14} + 4f_{15} + 2f_{16} + 4f_{17} + 2f_{18} + 4f_{19} + 2f_{20} + 4f_{21} + 2f_{22} + 4f_{23} + 2f_{24} + 4f_{25} + 2f_{26} + 4f_{27} + 2f_{28} + 4f_{29} + f_{30}) = 53,45342319.$

Kesalahan $= \frac{|53,45334632 - 53,45342319|}{53,45334632} = 0,0000014 = 0,0001\ \%$

<u>Metode Simpson $\frac{3}{8}$</u>:

Dengan menggunakan metode Simpson $\frac{3}{8}$ dan data dari tabel 4, maka:

$\int_2^5 e^{0,1x^2}\, x\, dx = \frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 2f_6 + 3f_7 + 3f_8 + 2f_9 + 3f_{10} + 3f_{11} + 2f_{12} + 3f_{13} + 3f_{14} + 2f_{15} + 3f_{16} + 3f_{17} + 2f_{18} + 3f_{19} + 3f_{20} + 2f_{21} + 3f_{22} + 3f_{23} + 2f_{24} + 3f_{25} + 3f_{26} + 2f_{27} + 3f_{28} + 3f_{29} + f_{30}) =$ 53,45351876.

Kesalahan $= \frac{|53,45334632 - 53,45351876|}{53,45334632} = 0,00000323 = 0,0003\ \%$

<u>Metode Newton-Cotes Orde 5:</u>

Dengan menggunakan metode Newton-Cotes orde 5 dan data dari tabel 4, maka: $\int_2^5 e^{0,1x^2}\, x\, dx = \frac{5}{288} * 0,1[19f_0 + 75f_1 + 50f_2 + 50f_3 + 75f_4 + 38f_5 + 75f_6 + 50f_7 + 50f_8 + 75f_9 + 38f_{10} + 75f_{11} + 50f_{12} + 50f_{13} + 75f_{14} + 38f_{15} + 75f_{16} + 50f_{17} + 50f_{18} + 75f_{19} + 38f_{20} + 75f_{21} + 50f_{22} + 50f_{23} + 75f_{24} + 38f_{25} + 75f_{26} + 50f_{27} + 50f_{28} + 75f_{29} + 19f_{30}] = 53,45334790$

Kesalahan $= \frac{|53,45334632 - 53,45334790|}{53,45334632} = 0,00000003 = 0,000003\ \%$

<u>Metode Newton-Cotes Orde 6:</u>

Dengan menggunakan metode Newton-Cotes orde 6 dan data dari tabel 4, maka: $\int_2^5 e^{0,1x^2}\, x\, dx = \frac{1}{140} * 0,1[41f_0 + 216f_1 + 27f_2 + 272f_3 + 27f_4 + 216f_5 + 82f_6 + 216f_7 + 27f_8 + 272f_9 + 27f_{10} + 216f_{11} + 82f_{12} + 216f_{13} + 27f_{14} + 272f_{15} + 27f_{16} + 216f_{17} + 82f_{18} + 216f_{19} + 27f_{20} + 272f_{21} + 27f_{22} + 216f_{23} + 82f_{24} + 216f_{25} + 27f_{26} + 272f_{27} + 27f_{28} + 216f_{29} + 41f_{30}] = 53,45334633$

Kesalahan $= \frac{|53,45334632 - 53,45334633|}{53,45334632} = 0,0000000002 = 0,00000002\ \%$

Metode Newton-Cotes Orde 10:

Dengan menggunakan metode Newton-Cotes orde 10 dan data dari tabel 4, maka:

$\int_2^5 e^{0,1x^2}\, x\, dx = \frac{5}{299376} * 0,1[16067f_0 + 106300f_1 - 48525f_2 + 272400f_3 - 260550f_4 + 427368f_5 - 260550f_6 + 272400f_7 - 48525f_8 + 106300f_9 + 32134f_{10} + 106300f_{11} - 48525f_{12} + 272400f_{13} - 260550f_{14} + 427368f_{15} - 260550f_{16} + 272400f_{17} - 48525f_{18} + 106300f_{19} + 32134f_{20} + 106300f_{21} - 48525f_{22} + 272400f_{23} - 260550f_{24} + 427368f_{25} - 260550f_{26} + 272400f_{27} - 48525f_{28} + 106300f_{29} + 16067f_{30}] = 53,45334632.$

Kesalahan $= \frac{|53,45334632 - 53,45334632|}{53,45334632} = 0\ \%$

Jawaban soal nomor 2:

a. Jawaban secara numerik dari $\int_3^6 e^{\sqrt{0,2x}}\, x^{2/3}(5x-3)dx$, h = 0,25 adalah :

Metode Trapesium:

Dengan menggunakan metode Trapesium, maka:

$\int_3^6 e^{\sqrt{0,2x}}\, x^{2/3}(5x-3)dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + 2f_8 + 2f_9 + 2f_{10} + 2f_{11} + f_{12})$.

Dari hasil hitungan, diperoleh data dalam Tabel 5 sebagai berikut :

Tabel 5. Nilai x_i dan $f(x_i)$ dari $f(x) = e^{\sqrt{0,2\,x}} x^{2/3}(5x-3)$, (h=0,25)

I	x_i	$f_i = f(x_i)$	i	x_i	$f_i = f(x_i)$
0	3,00	54,15831472	7	4,75	155,3978744
1	3,25	65,10447745	8	5,00	174,8626942
2	3,50	77,16793248	9	5,25	195,6809630
3	3,75	90,38120433	10	5,50	217,8878964
4	4,00	104,7772613	11	5,75	241,5190599
5	4,25	120,3894833	12	6,00	266,6103672
6	4,50	137,2516398	-	-	-

Jadi $\int_3^6 e^{\sqrt{0,2x}}\, x^{2/3}(5x-3)dx = \frac{0,25}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + 2f_8 + 2f_9 + 2f_{10} + 2f_{11} + f_{12}) = 435,2012069$

Metode Simpson $\frac{1}{3}$:

Dengan menggunakan metode Simpson $\frac{1}{3}$ dan data dari tabel 5, maka:

$\int_3^6 e^{\sqrt{0,2x}}\, x^{2/3}(5x-3)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + 4f_7 + 2f_8 + 4f_9 + 2f_{10} + 4f_{11} + f_{12}) = 434,8796483$

Metode Simpson $\frac{3}{8}$:

Dengan menggunakan metode Simpson $\frac{3}{8}$ dan data dari tabel 5, maka:

$\int_3^6 e^{\sqrt{0,2x}}\, x^{2/3}(5x-3)dx = \frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 2f_6 + 3f_7 + 3f_8 + 2f_9 + 3f_{10} + 3f_{11} + f_{12}) = 434,8796564.$

AKSIOMA: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika
Vol. 13, No. 3 Desember 2022
e-ISSN 2579-7646

Metode Newton-Cotes Orde 4:

Dengan menggunakan metode Newton-Cotes orde 4 dan data dari tabel 5, maka: $\int_3^6 e^{\sqrt{0{,}2x}}\, x^{2/3}(5x-3)dx = \frac{2}{45} * 0{,}25[7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 14f_4 + 32f_5 + 12f_6 + 32f_7 + 14f_8 + 32f_9 + 12f_{10} + 32f_{11} + 7f_{12}] = 434{,}87964194$

Metode Newton-Cotes Orde 6:

Dengan menggunakan metode Newton-Cotes orde 6 dan data dari tabel 5, maka: $\int_3^6 e^{\sqrt{0{,}2x}}\, x^{2/3}(5x-3)dx = \frac{1}{140} * 0{,}25[41f_0 + 216f_1 + 27f_2 + 272f_3 + 27f_4 + 216f_5 + 82f_6 + 216f_7 + 27f_8 + 272f_9 + 27f_{10} + 216f_{11} + 41f_{12}] =$ 434,8796419.

b. Jawaban secara numerik dari $\int_3^6 e^{\sqrt{0{,}2x}}\, x^{2/3}(5x-3)dx$, dengan menggunakan h = 0,1(n=30) adalah :

Metode Trapesium:

Dengan menggunakan metode Trapesium, maka:

$\int_3^6 e^{\sqrt{0{,}2x}}\, x^{2/3}(5x-3)dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + 2f_8 + 2f_9 + 2f_{10} + 2f_{11} + 2f_{12} + 2f_{13} + 2f_{14} + 2f_{15} + 2f_{16} + 2f_{17} + 2f_{18} + 2f_{19} + 2f_{20} + 2f_{21} + 2f_{22} + 2f_{23} + 2f_{24} + 2f_{25} + 2f_{26} + 2f_{27} + 2f_{28} + 2f_{29} + f_{30})$.

Dari hasil hitungan, diperoleh data dalam Tabel 6 sebagai berikut :

Tabel 6. Nilai x_i dan $f(x_i)$ dari $f(x) = e^{\sqrt{0{,}2\,x}} x^{2/3}(5x-3)$ dengan h = 0,1

i	x_i	$f_i = f(x_i)$	I	x_i	$f_i = f(x_i)$	i	x_i	$f_i = f(x_i)$
0	3,0	54,15831472	11	4,1	110,87432772	22	5,2	191,40734799
1	3,1	58,40476658	12	4,2	117,16813022	23	5,3	200,01012340
2	3,2	62,82689403	13	4,3	123,66083256	24	5,4	208,83621489
3	3,3	67,42675100	14	4,4	130,35460813	25	5,5	217,88789641
4	3,4	72,20640418	15	4,5	137,25163984	26	5,6	227,16745084
5	3,5	77,16793248	16	4,6	144,35411997	27	5,7	236,67716998
6	3,6	82,31342651	17	4,7	151,66425010	28	5,8	246,41935453
7	3,7	87,64498823	18	4,8	159,18424105	29	5,9	256,39631411
8	3,8	93,16473051	19	4,9	166,91631275	30	6,0	266,61036723
9	3,9	98,87477689	20	5,0	174,86269425	-	-	-
10	4,0	104,77726128	21	5,1	183,02562363	-	-	-

Jadi $\int_3^6 e^{\sqrt{0{,}2x}}\, x^{2/3}(5x-3)dx = \frac{0{,}1}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + 2f_8 + 2f_9 + 2f_{10} + 2f_{11} + 2f_{12} + 2f_{13} + 2f_{14} + 2f_{15} + 2f_{16} + 2f_{17} + 2f_{18} + 2f_{19} + 2f_{20} + 2f_{21} + 2f_{22} + 2f_{23} + 2f_{24} + 2f_{25} + 2f_{26} + 2f_{27} + 2f_{28} + 2f_{29} + f_{30}) =$ 434,9310925

Metode Simpson $\frac{1}{3}$:

Dengan menggunakan metode Simpson $\frac{1}{3}$ dan data dari tabel 6, maka:

$\int_3^6 e^{\sqrt{0{,}2x}}\, x^{2/3}(5x-3)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + 4f_7 + 2f_8 + 4f_9 + 2f_{10} + 4f_{11} + 2f_{12} + 4f_{13} + 2f_{14} + 4f_{15} + 2f_{16} + 4f_{17} + 2f_{18} + 4f_{19} + 2f_{20} + 4f_{21} + 2f_{22} + 4f_{23} + 2f_{24} + 4f_{25} + 2f_{26} + 4f_{27} + 2f_{28} + 4f_{29} + f_{30}) = 434{,}87964205$.

Metode Simpson $\frac{3}{8}$:

Dengan menggunakan metode Simpson $\frac{3}{8}$ dan data dari tabel 6, maka:
$\int_3^6 e^{\sqrt{0,2x}} x^{2/3}(5x-3)dx = \frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 2f_6 + 3f_7 + 3f_8 + 2f_9 + 3f_{10} + 3f_{11} + 2f_{12} + 3f_{13} + 3f_{14} + 2f_{15} + 3f_{16} + 3f_{17} + 2f_{18} + 3f_{19} + 3f_{20} + 2f_{21} + 3f_{22} + 3f_{23} + 2f_{24} + 3f_{25} + 3f_{26} + 2f_{27} + 3f_{28} + 3f_{29} + f_{30})$= 434,87964226.

Metode Newton-Cotes Orde 5:

Dengan menggunakan metode Newton-Cotes orde 5 dan data dari tabel 6, maka: $\int_3^6 e^{\sqrt{0,2x}} x^{2/3}(5x-3)dx = \frac{5}{288} * 0,1[19f_0 + 75f_1 + 50f_2 + 50f_3 + 75f_4 + 38f_5 + 75f_6 + 50f_7 + 50f_8 + 75f_9 + 38f_{10} + 75f_{11} + 50f_{12} + 50f_{13} + 75f_{14} + 38f_{15} + 75f_{16} + 50f_{17} + 50f_{18} + 75f_{19} + 38f_{20} + 75f_{21} + 50f_{22} + 50f_{23} + 75f_{24} + 38f_{25} + 75f_{26} + 50f_{27} + 50f_{28} + 75f_{29} + 19f_{30}]$= 434,87964188.

Metode Newton-Cotes Orde 6:

Dengan menggunakan metode Newton-Cotes orde 6 dan data dari tabel 6, maka: $\int_3^6 e^{\sqrt{0,2x}} x^{2/3}(5x-3)dx = \frac{1}{140} * 0,1[41f_0 + 216f_1 + 27f_2 + 272f_3 + 27f_4 + 216f_5 + 82f_6 + 216f_7 + 27f_8 + 272f_9 + 27f_{10} + 216f_{11} + 82f_{12} + 216f_{13} + 27f_{14} + 272f_{15} + 27f_{16} + 216f_{17} + 82f_{18} + 216f_{19} + 27f_{20} + 272f_{21} + 27f_{22} + 216f_{23} + 82f_{24} + 216f_{25} + 27f_{26} + 272f_{27} + 27f_{28} + 216f_{29} + 41f_{30}] = 434,87964188$.

Metode Newton-Cotes Orde 10:

Dengan menggunakan metode Newton-Cotes orde 10 dan data dari tabel 6, maka: $\int_3^6 e^{\sqrt{0,2x}} x^{2/3}(5x-3)dx = \frac{5}{299376} * 0,1[16067f_0 + 106300f_1 - 48525f_2 + 272400f_3 - 260550f_4 + 427368f_5 - 260550f_6 + 272400f_7 - 48525f_8 + 106300f_9 + 32134f_{10} + 106300f_{11} - 48525f_{12} + 272400f_{13} - 260550f_{14} + 427368f_{15} - 260550f_{16} + 272400f_{17} - 48525f_{18} + 106300f_{19} + 32134f_{20} + 106300f_{21} - 48525f_{22} + 272400f_{23} - 260550f_{24} + 427368f_{25} - 260550f_{26} + 272400f_{27} - 48525f_{28} + 106300f_{29} + 16067f_{30}] = 434,87964188$.

Jawaban soal nomor 3:

Jawaban secara numerik dari $\int_{0,5}^{1,7} f(x)dx$, h = 0,1 adalah:

Metode Trapesium:

Dengan menggunakan metode Trapesium, maka:
$\int_{0,5}^{1,7} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + 2f_8 + 2f_9 + 2f_{10} + 2f_{11} + f_{12})$.

Diberikan data sebagai berikut:

Tabel 7. Nilai x_i dan $f(x_i)$ dari suatu fungsi f(x)

i	x_i	$f_i = f(x_i)$	i	x_i	$f_i = f(x_i)$
0	0,5	1,616300	7	1,2	12,638417
1	0,6	2,263429	8	1,3	16,391669
2	0,7	3,103386	9	1,4	21,165112
3	0,8	4,189755	10	1,5	27,223997
4	0,9	5,590002	11	1,6	34,900555
5	1,0	7,389056	12	1,7	44,610586
6	1,1	9,693762	-	-	-

Jadi $\int_{0,5}^{1,7} f(x)dx = \frac{0,1}{3}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + 2f_8 + 2f_9 + 2f_{10} + 2f_{11} + f_{12}) = 16,76625836$

Metode Simpson $\frac{1}{3}$:

Dengan menggunakan metode Simpson $\frac{1}{3}$ dan data dari tabel 7, maka:

$\int_{0,5}^{1,7} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + 4f_7 + 2f_8 + 4f_9 + 2f_{10} + 4f_{11} + f_{12}) = 16,68059386$

Metode Simpson $\frac{3}{8}$:

Dengan menggunakan metode Simpson $\frac{3}{8}$ dan data dari tabel 7, maka:

$\int_{0,5}^{1,7} f(x)dx = \frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 2f_6 + 3f_7 + 3f_8 + 2f_9 + 3f_{10} + 3f_{11} + f_{12}) = 16,68096291$

Metode Newton-Cotes Orde 4:

Dengan menggunakan metode Newton-Cotes orde 4 dan data dari tabel 7, maka: $\int_{0,5}^{1,7} f(x)dx = \frac{2}{45} * 0,1 * [7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 14f_4 + 32f_5 + 12f_6 + 32f_7 + 14f_8 + 32f_9 + 12f_{10} + 32f_{11} + 7f_{12}] = 16,68030096$

Metode Newton-Cotes Orde 6:

Dengan menggunakan metode Newton-Cotes orde 6 dan data dari tabel 7, maka: $\int_{0,5}^{1,7} f(x)dx = \frac{1}{140} * 0,1 * [41f_0 + 216f_1 + 27f_2 + 272f_3 + 27f_4 + 216f_5 + 82f_6 + 216f_7 + 27f_8 + 272f_9 + 27f_{10} + 216f_{11} + 41f_{12}] = 16,68029567$

D. Simpulan

Dari hasil analisis jawaban 3 soal integral tertentu di atas, didapatkan beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Dari soal integral tertentu yang bisa dihitung nilai integralnya secara analitik, maka bisa disimpulkan bahwa:
   a. Semakin besar nilai n yang digunakan atau semakin banyak partisi yang dibuat untuk suatu area yang dihitung luasnya, dan semakin besar nilai orde dari metode Newton-Cotes yang digunakan, maka hasilnya akan semakin mendekati hasil analitiknya.
   b. Untuk hasil integral dari soal nomor 1, yang dihitung dengan metode Newton-Cotes Orde 10 yang menggunakan n=30, hasil integralnya sama persis dengan hasil analitiknya sampai ketelitian 8 angka di belakang koma.
2. Untuk soal integral yang tidak bisa dihitung nilainya secara analitik, maka untuk mendapatkan hasil yang terbaik, sebaiknya dihitung dengan menggunakan metode Newton-Cotes orde p yang mana p adalah faktor terbesar dari nilai n (banyak partisi yang digunakan).

E. Daftar Pustaka

Chapra, S.C. & Canale, R.P. (1991).“Numerical Methods For Engineers with Personal Computer Applications”, Mc.Graw-Hill Book Company, New York.

Conte, D.S. & Carl de Boor, D.C.(1992). “Dasar-Dasar Analisis Numerik, Suatu Pendekatan Algoritma”, Penerbit Erlangga.

Karris, T.S.(2007). “Numerical analysis using MATLAB and Excel”, Orchard Publications, California.

Klusalaas, J.(2005). “Numerical methods in engineering with MATLAB’, Cambridge Univ. Press.

Mulyono & Suryana, M.E. (2021). Kajian Sejumlah Metode Untuk Menghitung Integral Tentu Secara Numerik. *Prosiding Seminar Nasional Sains Dan Teknologi ke-11*, Diselenggarakan oleh Fakultas Teknik Universitas Wahid Hasyim Semarang, 27 Oktober 2021 (hal. 24-31). Diakses dari https://publikasiilmiah.unwahas.ac.id/index.php/PROSIDING_SNST_FT/issue/view/306/showToc.

Mulyono & Suryana, M.E. (2022). Evaluasi Metode Kuadratur Gauss, Suatu Metode Untuk Menghitung Integral Tertentu Secara Numerik. *Prosiding Seminar Nasional Sains Dan Teknologi ke-12*, Diselenggarakan oleh Fakultas Teknik Universitas Wahid Hasyim Semarang, 26 Oktober 2022 (hal. 24-31). Diakses dari https://publikasiilmiah.unwahas.ac.id/index.php/PROSIDING_SNST_FT/issue/view/380.

Munir, R.(2013).“ Metode Numerik “, Informatika Bandung, 271-297.

Otto, S.R dan J.P. Denier, J.P. (2005). “An introduction to programming and numerical methods in MATLAB’, Springer – Verlag.

Triatmodjo, B.(1992). “ Metode Numerik”, Beta Offset, 93-102.

Yang, W.Y, Cao, W., Kim, J., Park, K.W., Park, H.H, Joung, J., Ro, J.S., Lee, H.L., Hong, C.H., Taeho Im, T. (2020)..“Applied numerical methods using MATLAB”, Wiley-Interscience, Canada.