

WAYS OF UNDERSTANDING DAN WAYS OF THINKING SISWA MAN BERDASARKAN TEORI HAREL DALAM MENYELESAIKAN MASALAH PERSAMAAN LINGKARAN

Jasmine Salsabila Lutfi¹⁾, Tatang Herman²⁾

^{1,2}Universitas Pendidikan Indonesia

email: jasmynes.salsabila@upi.edu, tatangherman@upi.edu

Abstrak

Studi ini bertujuan untuk menganalisis cara pemahaman dan cara berpikir siswa MAN untuk menyelesaikan masalah yang melibatkan persamaan lingkaran berdasarkan teori Harel. Riset ini memanfaatkan pendekatan kualitatif deskriptif dengan metode fenomenografi untuk mengungkap perbedaan WoU dan WoT siswa dalam menyelesaikan masalah terkait persamaan lingkaran. Instrumen pengumpulan data yang digunakan yaitu tes persamaan lingkaran, serta wawancara klinis. Riset ini dilaksanakan di salah satu MAN di Jakarta Timur pada semester genap 2020/2021. Subjek riset berjumlah 28 siswa kelas XI MIPA 3. Hasil penelitian menunjukkan bahwa cara berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah persamaan lingkaran dipengaruhi oleh cara memahami konsep yang telah siswa pelajari. Cara memahami konsep yang salah atau tidak utuh menghasilkan cara berpikir yang tidak logis atau salah. Begitu pun sebaliknya, pemahaman yang baik mengenai persamaan lingkaran akan menghasilkan penyelesaian dari cara berpikir yang sistematis, efektif, dan logis. Dengan demikian, teori Harel mengenai duality principle berlaku terhadap siswa dalam menyelesaikan masalah terkait persamaan lingkaran.

Kata kunci: Ways of understanding, ways of thinking, teori Harel, persamaan lingkaran.

PENDAHULUAN

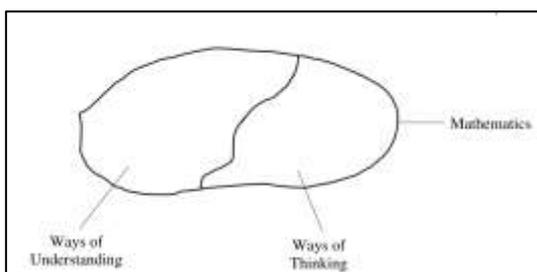
Matematika sebagai salah satu bidang studi yang dipelajari di lembaga pendidikan formal merupakan salah satu bagian yang penting dipelajari untuk meningkatkan mutu pendidikan. Matematika berkaitan erat dengan pemahaman konsep dan pemecahan masalah. Siswa belum bisa memahami suatu materi jika belum memahami materi sebelumnya atau materi prasyarat dari materi yang akan pelajari. Penguasaan materi pelajaran matematika seperti definisi, teorema, pembuktian, masalah dan penyelesaiannya diperlukan dalam pembelajaran.

Pada umumnya proses pembelajaran matematika siswa di kelas hanya menekankan pada penguasaan rumus hitungan bukan menekankan kemampuan proses berpikirnya (Nurhasanah et al., 2021). Baik siswa ataupun guru

hendaklak fokus pada alat konseptual seperti pemecahan masalah yang diperlukan untuk membangun objek matematika.

Menurut penelitian (Gold et al., 2017), pendidikan matematika yang baik harus memperhatikan bagaimana siswa memperoleh konsep matematika. Dalam beraktivitas, manusia melakukan 2 tindakan dasar yaitu tindakan fisik dan tindakan mental. Contoh dari tindakan fisik adalah mengangkat, mendorong, menarik, dan sebagainya. Selain melakukan tindakan fisik, manusia melakukan tindakan mental di berbagai bidang kehidupan, salah satunya di bidang matematika. Penalaran manusia melibatkan banyak tindakan mental seperti menafsirkan, menduga, menyimpulkan, membuktikan, menjelaskan, menyusun, menggeneralisasi, menerapkan,

memprediksi, mengklasifikasikan, mencari, dan pemecahan masalah (Harel, 2008b; Bakar et al., 2018).



Gambar 1. Definisi Matematika

Sumber : (Harel, 2008a)

Berdasarkan gambar 1, matematika adalah tindakan mental yang terdiri dari asimilasi dua himpunan bagian yang saling melengkapi, yaitu ways of understanding (cara pemahaman), dan ways of thinking (cara berpikir) (Harel, 2008b). Himpunan bagian pertama adalah kumpulan, atau struktur, struktur yang terdiri dari aksioma tertentu, definisi, teorema, bukti, masalah, dan solusi. Bagian ini terdiri dari semua cara pemahaman yang dilembagakan dalam matematika yang telah melembagakan cara-cara pemahaman dalam matematika sepanjang sejarah, dilambangkan dengan WoU. Himpunan bagian kedua terdiri dari semua cara berpikir, yang merupakan karakteristik dari tindakan mental yang produknya terdiri dari set pertama, dilambangkan dengan WoT.

Dari definisi matematika di atas, WoU dan WoT adalah dua hal yang jelas berbeda. WoU dan WoT dapat dipelajari dengan mengamati tindakan mental seseorang dan pernyataannya. Suatu pernyataan dan tindakan seseorang dapat menandakan suatu produk kognitif dari tindakan mental yang dilakukan oleh orang tersebut disebut cara pemahaman (WoU). Pengamatan berulang dari cara pemahaman dapat mengungkapkan karakteristik kognitif tertentu dari

tindakan tersebut disebut cara berpikir (WoT). WoT dan WoU memiliki hubungan timbal balik disebut dualitas yang merupakan kerangka teoritis dan prinsip instruksi berbasis DNR. DNR adalah singkatan dari Duality (dualitas), Necessity (kebutuhan), dan Repeated Reasoning (penalaran berulang).

Materi yang akan diuji dalam penelitian ini adalah persamaan lingkaran. Persamaan lingkaran termasuk dalam ruang lingkup aljabar (Nasaruddin, 2013). Aljabar merupakan topik dasar dalam pembelajaran matematika SMA/MAN Selain itu aljabar juga merupakan pintu gerbang menuju matematika lanjutan (Stinson, 2004). Penggunaan operasi dan manipulasi aljabar dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan persamaan lingkaran dapat melatih kemampuan matematis mereka terutama domain WoU dan WoT menuju matematika lanjutan. Sehingga, pemahaman konsep dan proses berpikir siswa dalam materi persamaan lingkaran di SMA/MAN ini menjadi esensial bagi siswa. Penelitian sebelumnya belum ada yang meneliti mengenai WoU dan WoT pada materi persamaan lingkaran. Selain itu, belum ada penelitian yang menganalisis WoU dan WoT pada siswa MAN ketika diberikan soal matematika. Dengan demikian, tujuan penelitian ini yaitu untuk mendeksripsikan Ways of Understanding (WoU) dan Ways of Thinking (WoT) siswa MAN dalam menyelesaikan masalah persamaan lingkaran.

METODE

Riset ini memanfaatkan pendekatan kualitatif dengan metode fenomenografi untuk mengungkap perbedaan WoU dan WoT siswa dalam menyelesaikan masalah terkait persamaan lingkaran.

Riset ini dilaksanakan di salah satu MAN di Jakarta Timur pada semester genap 2020/2021. Subjek riset berjumlah 28 siswa kelas XI MIPA 3. Hasil pekerjaan siswa dianalisis untuk mengetahui kemampuan matematis siswa pada dimensi WoU dan WoT, selanjutnya dilakukan wawancara mendalam untuk mengetahui pemahaman siswa terkait materi persamaan lingkaran. Peneliti merupakan instrumen pengumpulan data yang utama dalam riset kualitatif (Sugiyono, 2018). Selain itu, peneliti dibantu dengan instrumen pengumpulan data berupa tes terkait persamaan lingkaran, dan pedoman wawancara.

Soal yang diberikan dikaji lebih lanjut oleh peneliti saat wawancara klinis. Tes terkait persamaan lingkaran terdiri dari 1 soal yaitu “Sebuah lingkaran melewati tiga titik koordinat $(3, -4)$, $(6,5)$, dan $(-1, -2)$. Carilah persamaan lingkaran yang terbentuk dari tiga titik koordinat tersebut dan tuliskan langkah-langkah penyelesaiannya!”. Soal tes tersebut telah divalidasi oleh 3 validator ahli, yakni 2 dosen pendidikan matematika, dan 1 guru matematika. Selanjutnya, peneliti mengklasifikasikan jawaban siswa ke dalam tiap kategori. Dalam penelitian ini, karakteristik WoT dan WoU yang dimaksud adalah bagaimana cara berpikir dan cara memahami siswa terhadap masalah yang diberikan, seperti rumus pada Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Karakteristik WoU dan WoT

Karakteristik	Cara Memahami (WoU)		
	Kategori	Benar (B)	Salah (S)
Cara Berpikir (WoT)	Benar (B)	BB	BS
	Salah (S)	SB	SS

Tabel 1 menunjukkan karakteristik dari WoT dan WoU. Dari hasil temuan diperoleh empat karakteristik yang akan dikaji lebih dalam yaitu: cara berpikir benar dengan cara memahami yang benar, cara berpikir benar dengan cara memahami yang salah, cara berpikir salah dengan cara memahami yang benar, dan cara berpikir salah dengan cara memahami yang salah. Instrumen dalam penelitian kualitatif ini adalah peneliti sendiri. Teknik pengumpulan data dalam penelitian ini dilakukan dengan metode *think aloud*, dimana siswa berada diberikan lembar tugas untuk diselesaikan, siswa diminta untuk memecahkan masalah secara individu di kelas dan dilanjutkan dengan wawancara klinis.

Soal yang diberikan dikaji lebih lanjut oleh peneliti saat wawancara klinis. Setelah kegiatan wawancara klinis dilakukan, maka untuk memperoleh teknik validasi data dalam penelitian ini dilakukan metode triangulasi. Metode triangulasi dilakukan dengan membandingkan hasil tugas siswa dan hasil wawancara klinis.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini adalah indikator karakteristik cara berpikir dan cara memahami (Nurhasanah et al., 2021):

Tabel 2. Indikator Karakteristik WoU dan WoT

No.	Karakteristik	Deskripsi
1	Cara berpikir yang benar dengan cara memahami yang benar (BB)	Cara berpikir benar yaitu dengan menggunakan konsep/algorithm yang baik, logis, dan sistematis dalam menyelesaikan masalah persamaan

		lingkaran dengan pemahaman yang baik.
2	Cara berpikir yang benar dengan cara memahami yang salah (BS)	Langkah/strategi berpikir yang digunakan sistematis dan logis, penggunaan operasi aljabarpun benar namun tidak memahami konsep.
3	Cara berpikir salah dengan cara memahami yang benar (SB)	Langkah/strategi berpikir yang digunakan salah, operasi aljabar tidak logis, dan tidak teliti dengan proses algoritma/perhitungan, namun paham konsep dengan baik.
4	Cara berpikir salah dengan cara memahami yang salah (SS)	Langkah/strategi berpikir yang digunakan salah, tidak logis, salah/tidak teliti dengan proses algoritma/perhitungan, dan tidak memahami konsep.

Dari rumus karakteristik yang ditemukan, tiap karakteristik mempunyai ciri-ciri tertentu sehingga dikelompokkan menjadi karakter yang sama seperti pada tabel 3.

Tabel 3. Hasil Karakteristik WoT dan WoU Siswa

WoT	WoU	Jumlah Siswa	Persentase
B	B	4	14%
B	S	0	0%
S	B	7	25%
S	S	17	61%
Total		28	100%

Berdasarkan tabel 3, dari hasil temuan diperoleh banyak siswa termasuk ke dalam karakteristik BB sebesar 14%, karakteristik BS sebesar 0%, karakteristik SB sebesar 25%, dan karakteristik SS sebesar 61%. Tidak ada siswa yang termasuk kategori cara memahami salah dengan cara berpikir benar. Selain itu, mayoritas siswa termasuk ke dalam cara memahami yang salah dengan cara berpikir yang salah sebanyak 17 siswa atau 61%.

Untuk lebih jelas bagaimana WoT dan WoU dari tiap karakter dijelaskan secara lebih dalam dengan gambar hasil jawaban dan hasil analisis dari wawancara klinis yang dilakukan oleh peneliti.

Karakteristik Cara Berpikir Benar dengan Cara Memahami yang Benar (BB).

Tidak ada permasalahan yang diperoleh dalam karakteristik yang pertama karena siswa mampu berpikir dengan benar dan logis serta siswa mampu menggunakan konsep yang benar. Berikut Gambar 2 hasil jawaban siswa yang tergolong BB terhadap penyelesaian masalah persamaan lingkaran:

Gambar 2. Jawaban Siswa yang Tergolong BB

Berdasarkan Gambar 2 siswa mampu mengerjakan soal dengan cara/strategi yang tepat, sistematis, dan logis dengan mensubstitusi terlebih dahulu masing-masing titik yang diketahui ke rumus persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Selanjutnya dilakukan proses eliminasi dan substitusi untuk mencari nilai A, B , dan C . Setelah itu substitusi kembali nilai A, B , dan C ke persamaan lingkaran, Sehingga jawaban yang benar yaitu $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$. Berdasarkan hasil wawancara, siswa dapat menjelaskan cara penyelesaian dengan baik, serta memahami konsep persamaan lingkaran. Dengan demikian, subjek memiliki WoT dan WoU yang tergolong karakteristik BB.

Karakteristik Cara Berpikir Salah dengan Cara Memahami yang Benar (SB).

Karakteristik selanjutnya yaitu cara berpikir yang salah dengan cara pemahaman yang benar (SB). Berikut Gambar 3 contoh hasil jawaban siswa dalam menyelesaikan soal persamaan lingkaran:

Gambar 3. Jawaban Siswa yang Tergolong SB

Berdasarkan Gambar 3 siswa memahami konsep persamaan lingkaran dengan baik, mampu menghubungkan unsur-unsur yang diketahui dalam soal, namun algoritma yang digunakan tidak teliti sehingga keputusan akhir salah. Siswa menyelesaikan soal dengan menggunakan strategi yang tepat, namun terdapat kesalahan perhitungan akibat ketidakteelitian sehingga menyebabkan perhitungan pada langkah berikutnya keliru atau tidak tepat. Siswa sudah menjawab nilai $B = -2$ dengan benar, namun terdapat kesalahan pada $A + (-2) = 8$ seharusnya $A + (-2) = -8$. Akibat hal tersebut, siswa salah menentukan nilai A , dan C . Sehingga, cara berpikir siswa termasuk salah karena hanya adanya kesalahan perhitungan. Dengan demikian, subjek memiliki WoT dan WoU yang tergolong karakteristik SB.

Karakteristik Cara Berpikir Salah dengan Cara Memahami yang Salah (SS).

Karakteristik selanjutnya yaitu cara berpikir yang salah dengan cara pemahaman yang salah. Berikut Gambar

4 contoh hasil jawaban siswa dalam menyelesaikan soal persamaan lingkaran.

$$\begin{aligned} P_1 [B-C] \\ &= [(6-(-1)), (5-(-2))] \div 2 \\ &= [7/2, 7/2] \\ r &= \sqrt{(3-7/2)^2 + (4-7/2)^2} \\ &= (7,5) \\ L &= (x-7/2)^2 + (y-7/2)^2 \\ &= (7,5)^2 \end{aligned}$$

Gambar 4. Jawaban Siswa yang Tergolong SS

Berdasarkan Gambar 4, siswa tidak memahami dengan baik konsep persamaan lingkaran tanpa memaknai rumus yang digunakan. Langkah pertama yang ditentukan siswa yaitu menentukan pusat lingkaran terlebih dahulu dengan mengurangi titik kedua dengan titik ketiga. Strategi tersebut tidak tepat karena jarak antara dua titik itu belum tentu jarak terpanjang atau jari-jari. Siswa tidak memahami konsep apa yang digunakan untuk menyelesaikan soal persamaan lingkaran tersebut. Dengan WoT dan WoU yang dilakukan oleh subjek, maka subjek tergolong karakteristik SS.

Cara memahami yang salah akan berimplikasi dengan cara berpikir yang salah, sesuai dengan fakta hasil persentase sebesar 61% yang diperoleh dari tes yang diujikan dan wawancara klinis oleh peneliti. Tiap karakter dari WoT dan WoU yang ditemukan oleh peneliti berpengaruh pada tindakan mental yang dilakukan oleh siswa. Pemahaman merupakan suatu proses yang dapat meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematis pada siswa. (Nasaruddin, 2013). Siswa berperan untuk dapat memahami setiap

langkah pemecahan masalah agar proses berpikir berjalan dengan baik (Fitri et al., 2021). Sehingga, cara berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah persamaan lingkaran dipengaruhi oleh cara pemahaman konsep yang telah mereka pelajari.

Pemahaman konsep pada matematika merupakan hal yang saling bekesinambungan, sehingga jika siswa tidak bisa memahami suatu konsep maka siswa tersebut akan mengalami kesulitan dalam melanjutkan materi yang dipelajari (Komariyah et al., 2018). Sebanyak 7 siswa yang termasuk kategori cara berpikir salah dengan cara memahami benar (SB), seluruhnya melakukan kesalahan operasi aljabar atau kesalahan perhitungan. Meskipun demikian, siswa kategori SB menyelesaikan soal menggunakan langkah-langkah yang sistematis dan logis. Proses berpikir pada pemecahan masalah matematika yang dilakukan siswa terlihat dari runtutan penyelesaian masalah tersebut (Yanti & Syazali, 2016).

Berdasarkan hasil penelitian Lutfi & Khusna (2021), dalam menyelesaikan soal irisan dua lingkaran, siswa tidak teliti dalam perhitungan, kurang memahami materi irisan dua lingkaran, dan salah dalam pengambilan kesimpulan. Hasil penelitian Nirawati et al. (2021) menunjukkan bahwa kesalahan siswa dalam menyelesaikan soal matematika, antara lain salah menerapkan prosedur (kesalahan konsep), dan kurang menguasai materi yang dibutuhkan. Siswa kurang memahami konsep-konsep dasar matematika, sehingga siswa kesulitan dalam menjawab permasalahan yang diberikan (Apriansyah & Ramdani, 2018).

Cara berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah dipengaruhi oleh cara memahami konsep yang telah siswa pelajari. Begitu pun sebaliknya. Cara berpikir dapat memengaruhi cara memahami terhadap konsep/situasi/masalah yang baru (Harel, 2013). Dalam penelitian yang dilakukan oleh Harel (Harel, 2013) dalam DNR-system terdapat *duality principle* yang menyatakan dua pernyataan ganda yaitu Duality I (*Students at any grade level come with a set of ways of thinking, some desirable and some undesirable, that inevitably affect the ways of understanding we intend to teach them*) dan Duality II (*Students develop desirable ways of thinking only through proper ways of understanding*). Perubahan dalam cara berpikir membawa perubahan dalam cara pemahaman, begitu pun sebaliknya. Sehingga terdapat hubungan timbal balik antara cara berpikir (WoT) dan cara memahami (WoU) dalam prinsip dualitas.

SIMPULAN

Pada umumnya ditemukan hasil bahwa ketika cara berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah benar maka cara memahami terhadap konsep yang baru benar. Namun pada karakteristik lain cara berpikir siswa salah maka cara memahami terhadap konsepnya pun salah artinya cara memahami terhadap suatu konsep memengaruhi cara berpikir siswa dalam bertindak menyelesaikan suatu masalah. Dalam hal ini Teori Harel mengenai *duality principle* berlaku terhadap siswa dalam menyelesaikan masalah terkait persamaan lingkaran yaitu siswa mengembangkan cara berpikir hanya melalui konstruksi cara-cara memahami, dan cara-cara memahami yang mereka hasilkan

ditentukan oleh cara berpikir yang dimiliki. Ditemukan beberapa kesalahan dalam pekerjaan siswa, antara lain kurang memahami konsep gradien, salah menerapkan prosedur (kesalahan konsep), dan kurang menguasai materi yang dibutuhkan.

DAFTAR PUSTAKA

- Apriansyah, D., & Ramdani, M. (2018). Analisis Kemampuan Pemahaman dan Berfikir Kreatif Matematik Siswa MTs pada Materi Bangun Ruang Sisi Datar. *Jurnal Cendekia : Jurnal Pendidikan Matematika*, 2(2), 1–7.
<https://doi.org/10.31004/cendekia.v2i2.46>
- Bakar, M. T., Suryadi, D., Darhim, Tonra, W. S., & Noto, M. S. (2018). The association between conceptual understanding and reasoning ability in mathematics: An analysis of DNR-based instruction models. *Journal of Physics: Conference Series*, 1088, 0–5.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1088/1/012107>
- Fitri, N. D., Santoso, E., & Jatisunda, M. G. (2021). Analisis Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Siswa berdasarkan Langkah Polya. *System Thinking Skills Dalam Upaya Transformasi Pembelajaran Di Era Society 5.0*, 155–165.
- Gold, B., Behrens, C. E., & Simons, R. A. (2017). *Using the Philosophy of Mathematics in Teaching Undergraduate Mathematics*. The Mathematical Association of America Press.

- <https://www.ptonline.com/articles/how-to-get-better-mfi-results>
- <https://doi.org/10.24256/jpmipa.v1i2.93>
- Harel, G. (2008a). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: Focus on proving. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 40(3). <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0104-1>
- Harel, G. (2008b). *What is Mathematics? A Pedagogical Answer to a Philosophical Question*, Guershon Harel (pp. 1–26). <https://doi.org/10.5948/upo9781614445050.018>
- Harel, G. (2013). DNR-Based Curricula: The Case of Complex Numbers. *Journal of Humanistic Mathematics*, 3(2). <https://doi.org/10.5642/jhummath.201302.03>
- Komariyah, S., Afifah, D. S. N., & Resbiantoro, G. (2018). Analisis Pemahaman Konsep dalam Memecahkan Masalah Matematika ditinjau dari Minat Belajar Siswa. *Sosiohumaniora*, 4(1), 1–8.
- Lutfi, J. S., & Khusna, H. (2021). Analisis Kemampuan Representasi Matematis Siswa berdasarkan Tingkat Motivasi Belajar pada Pandemi Covid-19. *Jurnal Cendekia : Jurnal Pendidikan Matematika*, 5(3), 2185–2197. <https://doi.org/10.31004/cendekia.v5i3.728>
- Nasaruddin. (2013). Karakteristik dan Ruang Lingkup Pembelajaran Matematika di Sekolah. *Al-KHawarizmi*, 1(2), 63–76.
- Nirawati, R., Darhim, Fatimah, S., & Juandi, D. (2021). Realistic Mathematics Learning on Students' Ways of Thinking. *Mathematics Teaching-Research Journal*, 13(4), 112–130.
- Nurhasanah, H., Turmudi, & Jupri, A. (2021). Karakteristik Ways of Thinking (WoT) dan Ways of Understanding (WoU) Siswa Berdasarkan Teori Harel. *Journal of Authentic Research on Mathematics Education (JARME)*, 3(1), 105–113. <https://doi.org/10.37058/jarme.v3i1.2449>
- Stinson, D. W. (2004). Mathematics as “Gate-Keeper” (?): Three Theoretical Perspectives that Aim Toward Empowering All Children With a Key to the Gate. *The Mathematics Educator*, 14(1), 8–18. <http://math.coe.uga.edu/tme/Issues/v14n1/v14n1.Stinson.pdf>
- Sugiyono. (2018). *Metode Penelitian Pendidikan (Pendekatan Kuantitatif, Kualitatif, dan R&D)*. Alfabeta.
- Yanti, A. P., & Syazali, M. (2016). Analisis Proses Berpikir Siswa dalam Memecahkan Masalah Matematika berdasarkan Langkah-Langkah Bransford dan Stein ditinjau dari Adversity Quotient. *Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika*, 7(1), 63–74. <https://doi.org/10.24042/ajpm.v7i1.132>